

## 从一个演示课件看 《多元函数微分学》的多媒体教学

陈纪修 於崇华 金路\*

**摘要** 在正常的课堂教学中选择适当的内容使用多媒体辅助教学会提高教学效率、活跃教学气氛,收到事半功倍的效果。本文以一个演示课件为具体形式,介绍了“多元函数微分学”的多媒体教学方法、具体步骤以及相关内容。

**关键词** 演示课件 多元函数微分学 多媒体教学

《数学分析》是数学系最重要的一门基础课,是分析、几何和方程等后继课程的基石。学生从中学数学进入到《数学分析》的学习,需要经过一个认识和思维上的跳跃,这是一个比较困难的过程。如何在教学方法上进行改革,引导学生尽快适应这一思想方法上的跳跃,是一个需要认真研究的课题。

现代教育学和心理学的兴起与发展,使人们改变了原有的教、学观念,开始重新认识教与学的活动。单纯地向学生灌输,学生被动地接受的教学方法,越来越受到挑战。目前,以计算机为主体的多媒体技术正在迅速发展,由于多媒体教学能综合图像、动画、音响、文本等多种效果,使抽象的内容具体化和形象化,微观的事物宏观化,复杂的事物简单化,并能多角度和多层次地向学生传递信息,促进教与学的互动效果,因此越来越受到普遍的重视。

《数学分析》课程中从一元微积分过渡到多元微积分的学习,在几何上需要一个从一维空间到高维空间的飞跃。然而,对高维空间中的区域与多元函数的图像从几何上进行思考,往往是很困难的。特别是有一些在一维空间是成立的结论,在高维空间并不成立。例如,对于一元函数,可导与可微的概念等价,但对于多元函数却不然。高维空间的内在结构决定了多元函数的性质和图像要比一元函数复杂得多,而如何确定已知多元函数的性质,很大程度上依赖于对它的几何图像的想象。但在许多教科书上,往往只通过分析的方法来讨论多元函数的性质,很少从几何上来说明问题的根源和本质。虽然这对于数学概念的理解在逻辑上具有说服力,但由于缺乏对函数图像的直观认识,因而无法从几何上理解产生这种现象的原因,妨碍了学生对于概念的深刻理解。

\* 陈纪修 复旦大学数学系 於崇华 复旦大学数学系 金路 复旦大学数学系

以多元函数的极限、连续、可偏导和可微这一部分的教学为例,为说明概念之间的差别,往往需要举出一些性质很“怪”的函数例子,但它们的图像,在黑板上是无法描绘的。鉴于这个问题,我们在正常教学的基础上,编写了一个多媒体演示课件,利用图像来说明一些“怪”函数的性质,从而增强学生的直观认识,使他们学会结合几何图像来讨论问题,同时也使学生认识到,分析的证明思想往往源于直观的几何想象。

对于设计多媒体演示课件,我们总的指导思想是:

1)多媒体教学是一种高科技的教学手段,但它并不能代替常规的课堂教学,而只能是课堂教学的扩展和补充。所以,在内容的选择上,只对那些在课堂教学中无法形象而直观地表达的内容编写多媒体演示课件。

2)演示课件并不需要设计得大而全,要短小精悍,突出重点,简单明了,达到说明问题的目的即可。

3)充分发挥多媒体教学的优势,增加直观性,使学生们通过函数的图像能够推想它的分析性质。同时介绍利用计算机绘制函数图像的方法,调动他们学习上的主观能动性。

4)演示课件所选择的对象应是那些既能反映多元函数特殊性质,却又无法想象其图像的“怪”函数。

5)在设计方法上,首先,尽可能利用商品化的数学软件,如 Mathematica 等,做出函数在各种层面和角度的图像,这一方面可以减少工作量,另一方面让学生自己实践时容易上手。其次,由于这些软件的局限性,往往达不到课堂演示的要求,所以再利用绘图和编程软件进行必要的加工。最后,出于课堂教学的连贯性的需要,利用 Microsoft PowerPoint 等软件来进行演示。

基于上述思想,我们把演示课件分为以下几个部分:

### 一、对基本概念和结论进行复习

学习的过程是一个不断观察、思考、比较和探索的过程。如果没能做到对相应数学知识的完全了解,则对于函数图像的观察就只能停留在视觉上的认知阶段,无法说明现象、分析问题、得出结论。要根据函数的图像研究函数的性质,就必须掌握相应的基本概念、原理和结论,以及它们的分析和几何意义。因此,我们首先综合复习与本课件相关的数学知识,内容包括:多重极限、多次极限、多元函数的连续性、偏导数、方向导数和多元函数的可微性。

### 二、对具体函数演示图形,诱导学生对其分析性质进行推断

我们对以下几个函数编写了演示课件,它们在原点的特殊性质反映了多元函数与一元函数的本质差别。

$$1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$3) f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

$$4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y^2 - x)^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$5) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

以下以函数 4) 为例作一介绍。首先我们放映它的图像(图 1): (a) 函数的整体图像; (b) 函数在第一卦限的图像; (c) 函数在第一卦限图像的旋转动画中的三幅剪辑), 并加以适当讲解。学生通过对图像从各个角度和层面进行观察, 立即就能看出: 当  $(x, y)$  沿  $x$  轴或  $y$  轴趋于原点时, 函数极限为 1; 当  $(x, y)$  沿抛物线  $y^2 = x$  趋于原点时, 函数极限为 0。这说明当趋于原点时, 函数极限不存在, 因此它在原点不连续, 从而也就不可微。

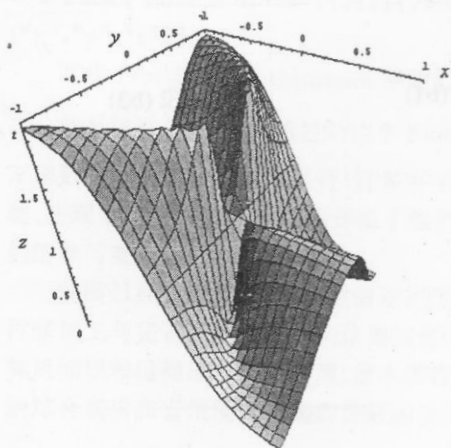


图 (a)

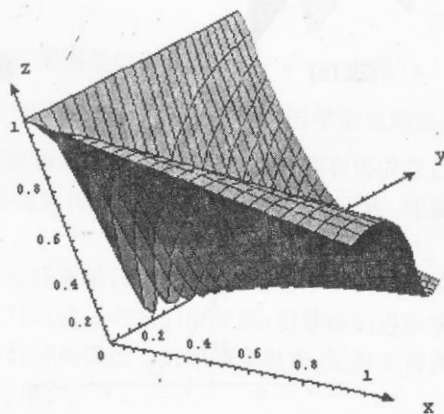


图 (b)

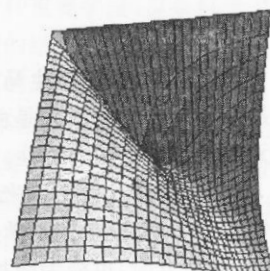
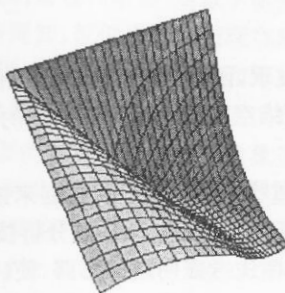
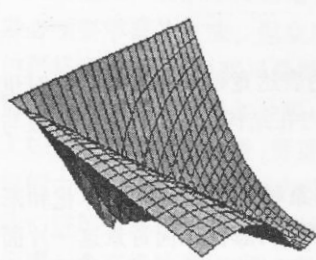


图 (c)

图 1

为了说明函数在原点的偏导数与方向导数的存在性,我们同样以播放图像的方式来讲解(图2:(a)函数图像与平面相交的整体图;(b1)~(b4)是交线的各种平面图)。首先从图2(b1)和(b2)可以看出函数在原点的两个偏导数都存在并且等于零;从图2(b3)和(b4)可以看出交线在原点的光滑性,这说明函数在原点沿各个方向的方向导数存在。

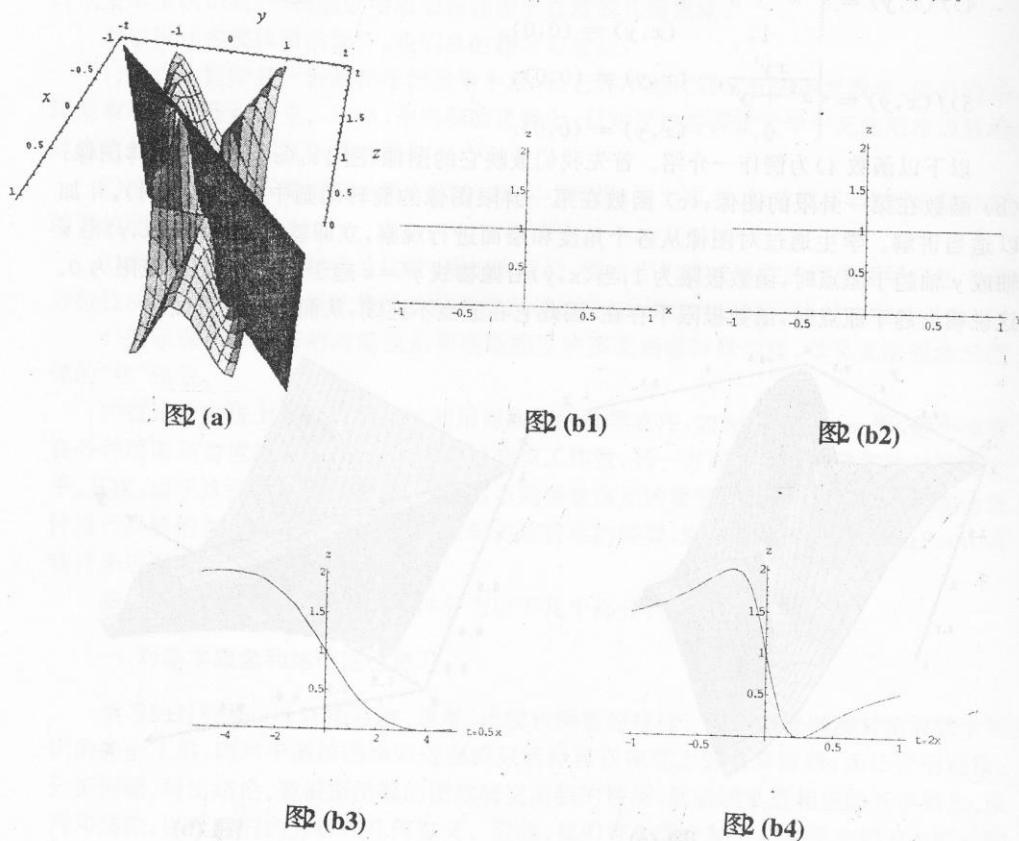


图2

通过这个例子,学生马上就发现,函数的性质在几何上的表达竟是如此直观!同时也通过几何图像理解了正是由于高维空间与一维空间不同的内在结构,造成了多元函数与一元函数许多不同的特性。

总之,结合几何图像来分析问题、考虑问题,使看起来抽象和复杂的问题具体化和形象化,一方面有助于纠正学生在本课程学习中只注意分析技巧,而忽视几何背景这一片面倾向,另一方面,也极大地扩展了学生考虑问题的思路,使《数学分析》的教学变得生动起来。

多媒体教学手段正是以其新颖、直观、形象、动感的画面,使学生的注意力高度集中,引发出强烈的求知欲,自始至终以期待的心情进行学习和思考,从而充分调动了他们的学习积极性。

### 三、介绍利用计算机作图的方法, 引导学生的参与意识

创造心理学的研究表明:人的主动参与、积极探索、独立判断、敢于破旧、勇于创新是发展智力和开发创造力的基础。如何诱导和开发学生的主动参与意识,培养他们的独立思考和工作能力,是我们经常思考的问题。如果只停留在图形演示与讲解的教学层次,虽然可以吸引学生的注意力,引起他们的兴趣,达到一定的教学效果,但课堂中讲授的知识量终究是有限的,换一些函数,其几何图像和分析意义又如何呢?学生可能还是会手足无措。培养和提高他们自己的独立动手能力和解决问题能力,使他们在遇到新问题时不会望而却步,是更深一层次的教学目的。

要做到这一点,掌握新的工具是十分必要的。因此,我们进一步介绍了数学软件 Mathematica 的画图方法。例如,绘制图 1(a)所用的命令为

```
Plot3D[(y^2-x)^2/(x^2+y^4),{x,-1,1},{y,-1,1},Axes->True,Boxed->False,BoxRatios->{1,1,1},ViewPoint->{0.8,-1.2,1.2},AxesLabel->{"x","y","z"}],
```

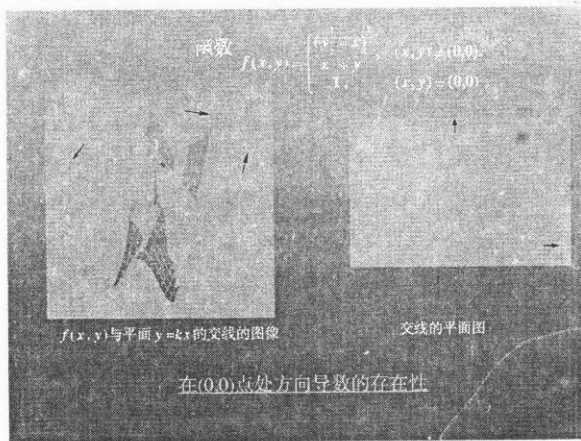
其中 Plot3D 是 Mathematica 中的绘制三维图形的函数,而  $(y^2-x)^2/(x^2+y^4)$  就是函数  $\frac{y^2-x}{x^2+y^4}$ 。通过对这个 Plot3D 函数的参数作一些讲解,同学们立即发现:原来函数作图是如此地简单易行!许多本来无法想象的“怪”函数的图像,现在可以自己绘制、去观察、去分析,这大大地开拓了他们的视野,激发了他们举一反三的兴趣,增强了他们的参与意识,提高了动手能力。

前面已经指出,要达到课堂演示图形的良好效果,还需要用其它的图形软件和编程软件来加工与完善。当学生遇到这类问题时,可以通过与他们的交流,引导他们将所学的计算机知识和编程语言加以应用,使本课程与计算机课程有机地结合起来,这对于提高他们的综合素质和应用能力将起到良好的促进作用。

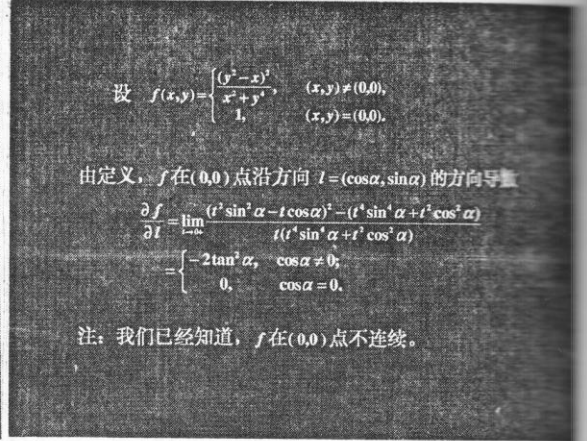
### 四、对于几何观察的结论,给出严格的分析证明

通过几何观察来得到相应的猜想和结论,是数学研究的一种重要手段,也是科学工作者必须要掌握的方法。但众所周知,仅仅通过几何观察所得到的结论,并不能成为数学上的严格定论,几何观察只是提供了考虑问题的背景和解决问题的思路,最终解决问题还是需要严格的逻辑推导和计算。《数学分析》的课程性质决定了,不但要引导学生学会从几何上如何进行观察与思考,更重要的是要培养学生的抽象逻辑思维能力、逻辑推理能力和计算能力。严格的分析证明方法训练,是这门课程的一个重点。因此,在几何观察的基础上,我们讲解了通过观察所得到的结论的严格分析证明,使几何作图、观察思考与分析证明结合成一个有机的整体(图 3 是讨论方向导数的一组幻灯片,(b)是其存在性证明的幻灯片,它通过点击(a)中在  $(0,0)$  点处方向导数的存在性出现)。由于对图像的观察大大提高了学生的兴趣和好奇心,分析的证明也不再显得高高在上,而变得平易近人,大大减轻了一些学生对抽象证明的惧怕和抵触心理,从而加深了对课程内容的理解。

通过以上的实践,我们认为在正常的课堂教学中选择适当的内容使用多媒体辅助教



图B (a)



图B (b)

图 3

学,会大大增加知识信息的传播量,许多用黑板和粉笔无法确切描述的东西,通过多媒体教学方式可以新颖、生动、形象地表现出来,从而活跃了教学氛围,提高了教学效率。灵活运用计算机与多媒体辅助教学,使我们收到了事半功倍的教学效果。