《当代高教理论研究》2007 年第 6 期

无穷小量若干问题的探讨

复旦大学数学学院金融数学与控制科学系　朱慧敏

摘　要：通过对无穷小量的进一步探讨，澄清一些模糊认识、常见错误，给出相应的理论分析及推广，对学生掌握等价无穷小量替代方法求极限有着重要意义。

关键词：无穷小量，等价无穷小量，反向等价无穷小量，极限

无穷小量是以零为极限的变量，而不是一个很小的数。

1．无穷小量运算性质中易混淆的是

在同一变化过程中，有限多个无穷小量的代数和是无穷小量；有限多个无穷小量的乘积是无穷小量。

注意：上述性质中的有限多个，不能改为可列个或无穷多个。即可列个、无穷多个无穷小量的代数和、乘积未必是无穷小量。但是，学生常常犯这样的错误，以为可列个、无穷多个无穷小量的代数和、乘积是无穷小量。不妨举反例说明：

可列个、无穷多个无穷小量的代数和未必是无穷小量

例 1. 证明函数 $\frac{[x]}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时，不是无穷小量。

证明：当 $x\to\infty$ 时，$[x]\to\infty$，函数 $\frac{1}{x}$ 为无穷小量，若将上述无穷小量的性质随意推广，就会得出极限为 0，即函数 $\frac{[x]}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时，为无穷小量的错误结论。事实上，

对 $\forall x\in R, x\neq 0$，有 $[x]\le x<[x]+1$，

当 $x>0$ 时，$\frac{[x]}{[x]+1}<\frac{[x]}{x}\le\frac{[x]}{[x]}=1$　　而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{[x]+1}=1$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$ 即函数 $\frac{[x]}{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时，不是无穷小量。

当 $x<0$ 时，$1=\frac{[x]}{[x]}\le\frac{[x]}{x}<\frac{[x]}{[x]+1}$　　而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{[x]+1}=1$

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=1$ 即函数 $\frac{[x]}{x}$ 当 $x\to-\infty$ 时，不是无穷小量。

综上所述，函数 $\frac{[x]}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时，不是无穷小量。

2．等价无穷小量替代方法求极限易混淆的是

定理 1（等价无穷小量代换定理）设 $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$， $\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$ 存在，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

意义：计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 比较困难时，可利用等价无穷小量 $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$，$\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$，将 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 转化为计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$，即对函数的因子作等价无穷小量替换。但必须注意的是，当计算中出现无穷小量相加减时，不能不加思考便用等价量直接替换。

例 2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$

错误解法：当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$ ，

所以，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{(2x)^3}=0$

正确解法：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{(2x)^3\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{8x^3\cos x}=\dfrac{1}{16}$

事实上，当 $x\to0$ 时，虽然 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$ ，但这省略了关于 x 的高阶无穷小量部分后得到的等价关系，所以 $\tan x-\sin x$ 并不等于 0，而是 $\tan x-\sin x=\left(x+o(x)\right)-\left(x+o(x)\right)=o(x)$，更确切地说由 Taylor 公式得：

$$\tan x-\sin x=\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)=o(x^3)$$

所以对于代数和中各无穷小量不能随意代换，但是下列几种情况代数和中各无穷小量是可以代换的。学生往往很模糊，不易掌握。

定理 2 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\phi(x)=0$.

（1）若 $f(x)\sim\varphi(x)$ 则 $\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{g(x)}}=\lim\limits_{x\to0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{g(x)}}$

（2）若 $g(x)\sim\phi(x)$ 则 $\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{g(x)}}=\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\phi(x)}}$

（3）若 $f(x)\sim\varphi(x)$ 且 $g(x)\sim\phi(x)$ 则 $\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{g(x)}}=\lim\limits_{x\to0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\phi(x)}}$

意义：使求满足定理 2 条件的幂指函数的极限得以简化。

例 3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}[1-(1-\cos 2x)]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1-2x^2\right)^{-\frac{1}{2x^2}}\right]^{-2}=e^{-2}$

定理 3 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\phi(x)=0$ 且 $f(x)\sim\varphi(x)$，$g(x)\sim\phi(x)$，

(1) $\varphi(x)$ 与 $\phi(x)$ 同阶无穷小量，不是等价无穷小量，则 $f(x)-g(x)\sim\varphi(x)-\phi(x)$

(2) $\varphi(x)$ 与 $\phi(x)$ 同阶无穷小量，不是反向等价无穷小量，则

$$f(x)+g(x)\sim\varphi(x)+\phi(x)$$

证明：(1) 由已知，设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{\phi(x)}=k\ (k\neq0, k\neq1)$ 则 $\varphi(x)\sim k\phi(x)$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-g(x)}{\varphi(x)-\phi(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-g(x)}{(k-1)\phi(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{(k-1)\phi(x)}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{(k-1)\phi(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{(k-1)\phi(x)}-\frac{1}{k-1}=\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k-1}=1$$

所以 $f(x)-g(x)\sim\varphi(x)-\phi(x)$. 同理可证(2).

意义：计算极限 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)-g(x)]$ 比较困难时，只要满足定理 3 的条件，即可将 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)-g(x)]$ 转化为计算极限 $\lim\limits_{x\to0}[\varphi(x)-\phi(x)]$。上述结论可推广到：

$\lim\limits_{x\to0}[f(x)\pm g(x)]h(x)$，$\lim\limits_{x\to0}[f(x)\pm g(x)]^{h(x)}$，$\lim\limits_{x\to0}h(x)^{[f(x)\pm g(x)]}$，$\lim\limits_{x\to0}[f(x)\pm g(x)]^{[u(x)\pm v(x)]}$ （$u(x)$ 与 $v(x)$ 也须满足定理 3 的条件）。

例 4. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x})$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}-1\right)}{\frac{1}{x^2}}$$ （$\because \frac{1}{3x^2}$ 与 $-\frac{1}{3x^2}$ 不是等价无穷小量）

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3x^2}-\left(-\frac{1}{3x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

例 5．求极限 $\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{e^{x\ln a}-1+e^{x\ln b}-1+e^{x\ln c}-1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x\ln a+x\ln b+x\ln c}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left[1+x\ln(abc)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{x\ln(abc)^{\frac{1}{3}}}}\right\}^{\ln(abc)^{\frac{1}{3}}}=e^{\ln(abc)^{\frac{1}{3}}}=(abc)^{\frac{1}{3}}$$

上述例题告诉我们，在计算极限时，正确运用等价无穷小量作替换，使计算大大的简便。

Discussion on some concepts of infinitesimal quantity

Department of Financial Mathematics and Control Science, School of Mathematical Science, Fudan University

Zhu Huimin

Abstract: The article is aimed at clarifying some vague concepts of infinitesimal quantity and common errors by means of related theoretical analysis and its extension, which is helpful for students to study the solution of limit by replacement of equivalent infinitesimal quantity.

Key words: infinitesimal quantity, equivalent infinitesimal quantity, oppositely equivalent infinitesimal quantity, limit

参考文献

[1].陈纪修等．数学分析．高等教育出版社.2004.
[2].华东师范大学数学系．数学分析．北京高等教育出版社.1986.
[3].同济大学数学教研室．高等数学．北京高等教育出版社.1989.
[4].龚冬保．数学考研教程．西安交通大学出版社.2005.