文章编号:1004-4337(2005)02-0100-02 中图分类号:R311 文献标识码:A

数理诊断中的Bayes条件概率模型

祝国强 杭国明* 滕海英 黄 平
(第二军医大学基础医学部数理教研室 上海200433)

摘 要: 在疾病的数理诊断中,概率方法是常用的一种数学工具。介绍了Bayes条件概率模型在数理诊断中的应用,并对计算的结果进行了详细的分析与讨论。

关键词: Bayes条件概率模型; 数理诊断; 模型

二十世纪五十年代,Ledey RS与Lusted LB系统地从理论上分析了医生作出临床诊断的逻辑推理过程,提出了应用数理逻辑和概率论的模型作出诊断的原理和方法,形成了数理诊断学。并随着数学方法及电子计算机在疾病诊断中应用的日益广泛,有力地推动了数理诊断逐步向定量化、精确化和自动化的方向发展。下面我们讨论Bayes条件概率模型在肝癌鉴别诊断中的应用情况。

1 方法

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一完备事件组,即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,则对任意的事件 $B(P(B)>0)$,成立

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

上述公式称之为Bayes公式(或逆概率公式),这是一个

从表4可见,$AR(20)$模型较好的拟合了北京市2003年4~6月SARS疫情的传播情况。如果将模型预测值为负值时置零(因日增量一般不为负数),则模型误差会更小。由于该模型的阶 $m=20$,故我们可以认为每个病人可以直接造成他人感染的期限平均在20天左右。

最后要指出的是,本文主要是讨论选择什么曲线来拟合北京市2003年4~6月的疫情趋势问题。由于SARS的传播是受多种外界因素的影响和制约,它不单纯是时间 n 的函数,故所给模型只是在某个特定时间与特定环境下的一种描述,它不能简单地用于外推和预测。

参 考 文 献

1 G. E. P. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel. Time Series Analysis Forecasting and Control. 顾岚译. 北京:中国统计出版社,1997.
2 高世泽. 概率统计引论. 重庆:重庆大学出版社,2000.
3 洪楠. Spss for Windows. 北京:清华大学出版社,2003.

Autoregressive Model of Transmission of SARS

Gao Shize
(*College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing* 400047)

Abstract In this paper, the accumulative cases of SARS that have been maked a definite diagnosis from April to June 2003 in Beijing are investigated by analysis of time series. We gave model AR(20) of Transmission of SARS. The model is notable at high level by analysis of variance. Therefor, We infer that the average time that a patient with SARS transmit other one is about 20 days.

Key words SARS; analysis of time series; autoregressive model

收稿日期:2004-06-29

* 复旦大学数学系

重要的概率计算公式。该公式的实际背景是：已知出现了试验结果 B，要求找出使得结果发生的可能性最大的一个条件（或原因）A_i。具体计算方法是：先算出每一个 $P(A_i)$，这些是在试验之前就已经知道的概率，习惯上称之为先验概率（先于试验的概率），它反映了各种条件（或原因）发生的可能性大小，然后计算 $P(B|A_i)$，它表示在 A_i 发生的条件下产生结果 B 的概率，又由 Bayes 公式，反过来推出在结果 B 发生的条件下，条件（或原因）A_i 发生的概率 $P(A_i|B)$（此概率是在试验后确定的概率，因此称之为后验概率），再比较各个 $P(A_i|B)$ 的大小，就可找出使得结果 B 发生的可能性最大的这个条件（或原因）A_i。上述概率模型，称之为 Bayes 条件概率模型。

2　实例

癌症的早期诊断、治疗是提高疗效的关键。近年来，甲胎蛋白免疫检测法（简称 AFP 法）被普遍应用于肝癌的普查和诊断。设 $A=\{$肝癌患者$\}$，$B=\{AFP$ 检验反应为阳性$\}$；且已知 AFP 检测方法的真阳性率 $P(B|A)=0.94$，假阳性率 $P(B|\bar{A})=0.04$；在人群中肝癌的发病率一般只有 $P(A)=0.0004$；今有一人在普查中 AFP 检测结果为阳性，现问该人患肝癌的可能性有多大？也即是要求 $P(A|B)$。

由 Bayes 公式可知：

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$
$$=\frac{0.0004\times0.94}{0.0004\times0.94+0.9996\times0.04}=0.93\%$$

也就是说，AFP 检测结果为阳性的人，实际患肝癌的可能性只有0.93%，即不到1%。虽然此检验方法很精确，真阳性率（临床中又称检验方法的灵敏性）$P(B|A)=0.94$，真阴性率（临床中又称检验方法的特异性）$P(\bar{B}|\bar{A})=0.96$，两者都很高，且诊断价值

$$LR=\frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}=\frac{0.94}{0.04}=23.5$$

也很高（一般诊断价值 $LR>20$就认为是高的），但 $P(A|B)$ 值却不大，为什么？

3　讨论

这主要是因为肝癌的发病率 $P(A)=0.0004$，大大地小于检测方法的错误率，$P(B|\bar{A})=0.04$，$P(\bar{B}|A)=0.06$。例如：平均来讲，在10000人中，肝癌患者实际只有4人左右，而这10000人进行 AFP 检测后，出现错误检测结果的有400人至600人左右，大大多于实际患者4人。

因此，对稀有病例来讲，必须澄清一个观点：即在对稀有病例的普查中，一次检测为阳性者，实际患此病的概率并不大。后验概率 $P(A|B)$ 值太小，不足以作出正确判断，怎么办？对医生来讲，不能根据一次检测的结果就武断地下结论，需作进一步检验；对病人来讲，医生应做一些必要的解释工作，告诫病人一次检验的结果并不说明问题，不必太紧张，但也要认真对待，可进一步进行独立的复查，并结合其它项目的检查加以确诊。

假设 $B_i=\{$第 i 次 AFP 检测结果为阳性$\}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A|B_1B_2)=\frac{P(A)P(B_1B_2|A)}{P(A)P(B_1B_2|A)+P(\bar{A})P(B_1B_2|\bar{A})}$$
$$=\frac{P(A)P(B_1|A)P(B_2|A)}{P(A)P(B_1|A)P(B_2|A)+P(\bar{A})P(B_1|\bar{A})P(B_2|\bar{A})}$$
$$=\frac{0.0004\times0.94^2}{0.0004\times0.94^3+0.9996\times0.04^3}$$
$$=18.1\%$$

即两次 AFP 检测都为阳性者，患肝癌的可能性为18.10%，此值还不太大，可进一步做第3次检验。

由此可见，若三次检验均为阳性者，患肝癌的可能性就相当大了，这也就是为什么对稀有病例的检查，一般都须做三次。当然与此同时，还可作一些其它项目的检查，如 B 超、CT 等，以便确诊并及时治疗。

4　结论

需要强调指出的是，我们这里讨论的是对原始人群进行普查的情况。由 Bayes 公式所得到的结论是单项、一次检查，不足为凭。要进行多次、多项的检查才能确诊，此方法的本身还是很正确的。但在临床中，并不是单单靠单项、一次检验就作出判断，如在门诊诊断中，门诊病人都会有一些相应的临床表现，当医生根据病人的临床表现而怀疑病人有可能患肝癌时，才建议做 AFP 检测，此时，该病人患肝癌的可能性已不是普查中的0.0004，而是大大增加了。以 $P(A)=0.2$为例，则可计算得 $P(A|B)=0.8545$，准确性就很高了。因此，在门诊诊断中一般只需做一次 AFP 检测就可以了，医生可根据病人的临床表现及各项检验的结果综合分析即可作出判断。

参 考 文 献

1　周怀梧. 数理医药学. 上海：上海科学技术出版社，1983.
2　祝国强，刘庆欧. 医药数理统计方法. 北京：高等教育出版社，2004.
3　乐经良，祝国强. 医用高等数学. 北京：高等教育出版社，2004.