教 案

二重积分的计算

教学内容

二重积分的计算是多元积分学的基本技术，也是多重积分以及曲面积分的计算的基础，是微积分的重要工具之一。在这节中主要讲解以下几方面的内容：

（1） 直角坐标系下二重积分的计算；

（2） 二重积分的变量代换法；

（3） 极坐标系下二重积分的计算。

教学思路和要求

（1）计算重积分的基本思路是将重积分化为累次积分，通过逐次计算定积分，求得重积分的值。讨论二重积分的计算，其途径即是化二重积分为二次积分。通过“已知平行截面面积，求空间区域体积”的背景，引入二重积分化为二次积分来计算的方法，可以给学生一个直观上的认识。

（2）回忆定积分换元法的思想，可以对二重积分换元法则加深理解。注意指出作变量代换后面积元素的比例系数是 Jacobi 行列式的绝对值。

（3）从直角坐标到极坐标的变量代换是二重积分计算中十分常见的代换。当区域边界或被积函数易于用极坐标表示时，采用极坐标往往能带来很大的便利。因此这部分的内容还是要重点强调。

（4）有必要向学生介绍实例计算时的思考方法，引导他们提高计算能力。

教学安排

一. 直角坐标系下二重积分的计算

首先，假设区域Ω可表示为

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\}。$$

我们将根据二重积分的几何意义把

$$\iint\limits_{\Omega} f d\sigma$$

化为二次积分。为此，暂且假设 $f\ge 0$。

由上一节可知，$\iint\limits_{\Omega} f d\sigma$ 的值等于以Ω为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积 V（图 8.2.1），这个体积实际上还可以用一元函数积分学中“已知平行截面面积，求空间区域体积”的方法来求得。为此，我们固定$x\in[a,b]$，过$(x,0,0)$且平行于Oyz的平面截曲顶柱体得到的截面是该平面上一个以区间$[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$为下底，$z=f(x,y)$为曲边的一个曲边梯形，所以这个截面面积为

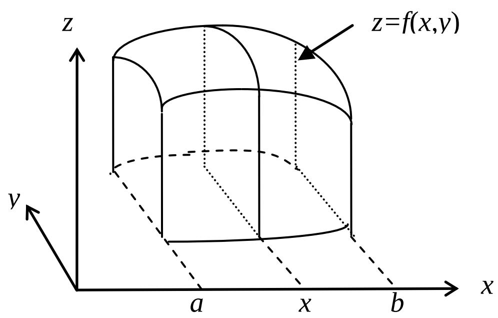


图 8.2.1

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy。$$

利用平行截面面积$A(x)$计算原曲顶柱体体积，即得

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx。$$

这个体积正是所求的二重积分的值，即

$$\iint_\Omega fd\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx。$$

上式右端的积分称为**先对y后对x的二次积分**。即是先固定x，以y为积分变量，在积分区间$[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$上计算$f(x,y)$的定积分，其积分值作为$x$的函数，再对$x$在区间$[a,b]$上计算定积分。这个二次积分通常记作

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy。$$

以上讨论中假设$f\geq 0$只是为了便于作几何解释，实际上对区域Ω上任意的可积函数f，均有

$$\iint_\Omega fd\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy。$$

同样地，如果区域Ω表示为

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,\psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y),\ c\leq y\leq d\}，$$

则f在Ω上的二重积分可以用先对x后对y的二次积分作计算：

$$\iint_\Omega fd\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx。$$

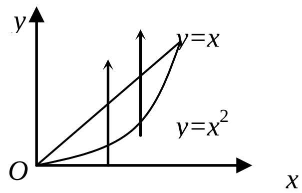
根据以上讨论，二重积分的计算可以归结为逐次计算两个一元函数的定积分，因而就计算本身而言，并无新的困难。然而关于区域Ω的恰当表示，还须作两点补充说明：

其一，当区域Ω不能表示为形如$\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x),a\leq x\leq b\}$或$\{(x,y)\,|\,\psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y),c\leq y\leq d\}$的“标准区域”时，可用平行于坐标轴的线段把$\Omega$剖分为几个上述形式的“标准区域”的并，利用积分关于区域的可加性，分别计算出相应的积分再求和即可。

其二，二重积分表示为二次积分往往可取两种顺序，但是，按不同的顺序，计算难易未必一致。为此，须根据具体情况决定应采用的顺序。

此外，在直角坐标系下，通常用$dxdy$表示面积元素，它相当于Ω中小矩形区域$[x,x+dx]\times[y,y+dy]$的面积。

例 设Ω是由直线$y=x$和抛物线$y=x^2$所围成的区域，计算积分$\iint_\Omega(2-x-y)dxdy$。



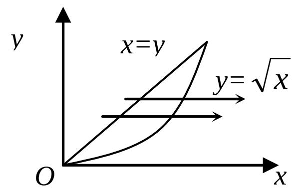


图 8.2.2

解 区域Ω可表为

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2\leq y\leq x,0\leq x\leq 1\}。$$

把原积分化为先对 y 再对 x 的积分，得

$$\iint\limits_{\Omega}(2-x-y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(2-x-y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(4x-7x^2+2x^3+x^4)dx=\frac{11}{60}。$$

为把原积分化为先对 x 再对 y 的积分，可把区域Ω表示为

$$\Omega=\{(x,y)\mid y\le x\le\sqrt{y},\ 0\le y\le 1\}，$$

这样，

$$\iint\limits_{\Omega}(2-x-y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y}^{\sqrt{y}}(2-x-y)dx。$$

例　设Ω是以$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$为顶点的三角形区域（图 8.2.3），求$\iint\limits_{\Omega}e^{-y^2}dxdy$。

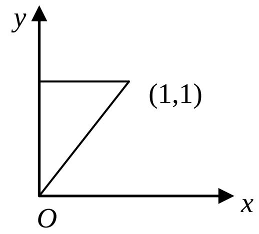


图 8.2.3

解　把原积分化为先对 x 再对 y 的积分，则有

$$\iint\limits_{\Omega}e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)。$$

注意，如果把原积分化为先对 y 后对 x 的积分，则得到

$$\iint\limits_{\Omega}e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy，$$

那就难以求积了。

例　求由马鞍面 $z=xy$ 和平面 $z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$ 所围成的空间区域的体积（图 8.2.4）。

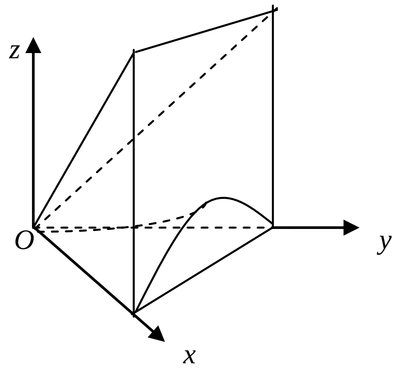


图 8.2.4

解　如图 8.2.4，由二重积分的几何意义，所求体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}(x+y-xy)dxdy，$$

其中$\Omega=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$。所以

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y-xy)dy$$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)+(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx=\frac{7}{24}。$$

例　求椭圆柱面$4x^2+y^2=1$与平面$z=1-y$及$z=0$所围成的空间区域的体积V（图 8.2.5）。

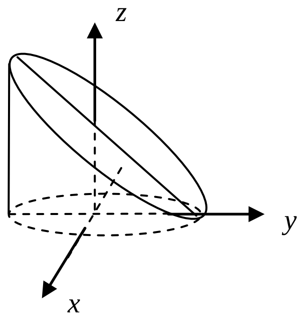


图 8.2.5

解　记Ω是Oxy平面上椭圆$4x^2+y^2=1$ 所围成的区域，于是

$$V=\iint\limits_{\Omega}(1-y)d\sigma。$$

因为Ω关于 x 轴对称，所以

$$\iint\limits_{\Omega}yd\sigma=0。$$

这样，$V=\iint\limits_{\Omega} d\sigma$。上式右端即区域$\Omega$的面积，注意到

Ω的边界是两半轴分别为$\dfrac{1}{2}$和 1 的椭圆，其面积为$\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{\pi}{2}$，故

$$V=\frac{\pi}{2}。$$

二．二重积分的变量代换法

在定积分计算中，换元法是一种常用的手段。熟知定积分的换元公式为

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

其中$a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$。通过变换函数$x=\varphi(t)$，化被积函数成为易于积分的形式。二重积分的换元则是从原变量(x,y)到新变量(u,v)的一个变换映射，其换元法则的形式叙述为以下定理。

定理 8.2.1 设f是Oxy平面中闭区域Ω上的连续函数，变换

$$\varphi:\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \end{cases}$$

把Ouv平面上的闭区域Ω'一对一地映射为区域Ω，而且

（1）$x(u,v),y(u,v)$在Ω'上具有连续一阶偏导数;

（2）在Ω'上φ的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0,$$

则有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv。$$

为节约篇幅，以下只给出证明大意。在Ouv平面上用平行于坐标轴的直线网格分割Ω'为若干小区域。除包含边界点的小区域外，其余均为小矩形。任取一个这样的小矩形$\Delta\Omega'$，设其四个项点分别为$P_1'(u,v)$，$P_2'(u+\Delta u,v)$，$P_3'(u,v+\Delta v)$，$P_4'(u+\Delta u,v+\Delta v)$。经过映射$\varphi$，它变换为$Oxy$平面上区域$\Omega$内的一个曲边四边形$\Delta\Omega$，所对应的四个顶点分别记为$P_1,P_2,P_3,P_4$。

当Δu和Δv充分小时，$\Delta\Omega$的面积$\Delta\sigma$近似等于以P_1P和P_1P_3为邻边构成的平行四边形的面积，即

$$\Delta\sigma\approx\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\|。$$

由计算可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}&=[x(u+\Delta u,v)-x(u,v)]\boldsymbol{i}\\&+[y(u+\Delta u,v)-y(u,v)]\boldsymbol{j}\\&\approx\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u\boldsymbol{j}。\end{aligned}$$

同理可得

$$\overrightarrow{P_1P_3}\approx\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v\boldsymbol{j}。$$

所以

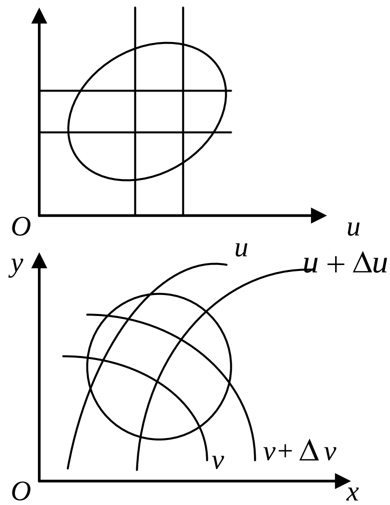


图 8.2.6

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\approx\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x'_u\Delta u & y'_u\Delta u & 0\\ x'_v\Delta v & y'_v\Delta v & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Delta u\Delta v\boldsymbol{k},$$

从而

$$\Delta\sigma\approx\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\Delta u\Delta v。$$

因此，二重积分作变量代换后面积元素的关系为

$$d\sigma=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv,$$

从而

$$\iint_{\Omega} f(x,y)d\sigma=\iint_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv。$$

例 设$q>p>0$，$b>a>0$，求由抛物线$y^2=px$，$y^2=qx$与双曲线$xy=a$，$xy=b$所围成的平面区域Ω的面积(图 8.2.7)。

解 作变量代换

$$\begin{cases}u=\dfrac{y^2}{x}, & p\le u\le q,\\ v=xy, & a\le v\le b.\end{cases}$$

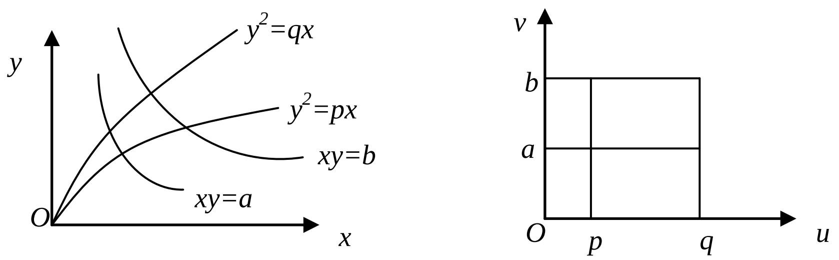


图 8.2.7

因为

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ y & x\end{vmatrix}=-\frac{3y^2}{x}\neq 0\quad（x\neq 0, y\neq 0）,$$

所以上述映射$(x,y)\mapsto(u,v)$是可逆的，其逆映射

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$$

的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right)^{-1}=-\frac{x}{3y^2}=-\frac{1}{3u}。$$

这样，Oxy平面上区域Ω对应于Ouv平面上矩形区域

$$\Omega' = \{(u,v) \mid p \le u \le q, a \le v \le b\}。$$

从而区域Ω的面积为

$$A = \iint\limits_{\Omega} d\sigma = \iint\limits_{\Omega'} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv = \iint\limits_{\Omega'} \frac{1}{3u} dudv$$

$$= \int_a^b dv \int_p^q \frac{du}{3u} = \frac{b-a}{3} \ln\frac{q}{p}。$$

三．极坐标系下二重积分的计算

从直角坐标到极坐标的变量代换是二重积分计算中十分常见的代换。当区域边界或被积函数易于用极坐标表示时，采用极坐标往往能带来很大的便利。

由直角坐标和极坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

得

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r。$$

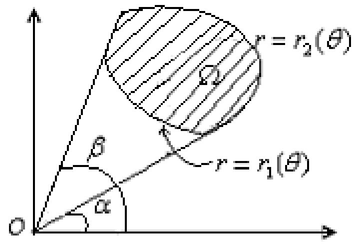


图 8.2.8

设函数 f 定义于Oxy平面上的闭区域Ω，Ω是由在极坐标下满足$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$（$\alpha \le \theta \le \beta$）的点组成。记

$$\Omega' = \{(r,\theta) \mid r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\},$$

于是

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y) d\sigma = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr。$$

例 计算二重积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy。$$

解 显然，在极坐标下，积分区域可表示为

$$\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le a, 0 \le \theta < 2\pi\}。$$

于是，作极坐标代换后即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r dr$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^a d\theta = \pi(1 - e^{-a^2})。$$

例 设$\Omega = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2, x \ge 0\}$，计算二重积分

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}。$$

解 用极坐标 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 代入 $(x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2$，即得 $r^2 \le \cos 2\theta$。这样，原积分区域在极坐标下对应于

$$\left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\theta},\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}。$$

利用被积函数和积分区域的对称性，即得

$$\iint_{\Omega}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{rdr}{(1+r^2)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\cos 2\theta}\frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1}{1+\cos 2\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}。$$

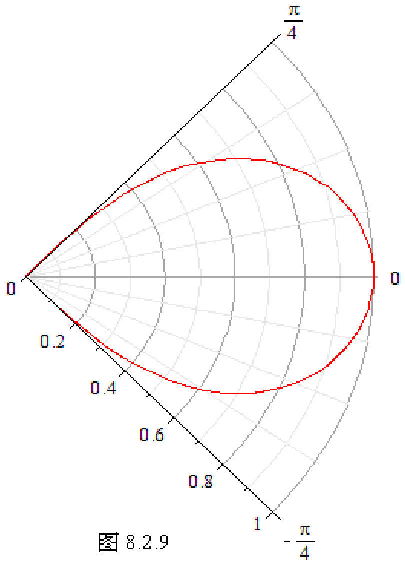


图 8.2.9

例　求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积。

解　上半椭球面的方程为

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}。$$

由椭球体关于三个坐标平面的对称性，即得

$$V=8\iint_{\Omega}c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy,$$

其中 $\Omega=\left\{(x,y)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$。

作广义极坐标变换：

$$\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta.\end{cases}$$

则 Oxy 平面上区域 Ω 相应于

$$\left\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}。$$

又变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr,$$

于是，经变量代换后可得

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 abcr\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot abc\left(-\frac{1}{3}\right)(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}\pi abc。$$

四．进一步的问题

作为本节讨论的继续，下一节将讨论三重积分的计算和重积分的应用。

五．习　　题

1．（1），（3），（5）；2．（1），（3），（4）；3；4；5；7．（1），（3），（4）；8；10；11；13。