教 案

隐函数存在定理及应用

教学内容

考察一个方程或方程组是否确定一个隐函数（向量值函数），是一个在实际中经常遇到的问题。隐函数存在定理就是研究这个问题的基础。它不但在数学理论中起着重要作用，而且对实际应用问题起着指导作用。让学生掌握学好这个定理，并会用这个定理解决问题，是这节课的授课重点。本节课中主要讲解下面的内容：

（1） 隐函数存在定理成立的条件；

（2） 隐函数存在定理的结论与隐函数导数（偏导数）的计算；

（3） 空间曲面的切平面。

教学思路和要求

（1）通过例子说明隐函数存在是需要条件的，且存在性常常是有一定范围的，即存在性是局部性质。

（2）讲述隐函数存在定理，并且讲述导数（偏导数）计算公式的推导过程，这可以对接下来的实际计算提供指导和方法上帮助。

（3）举例说明如何计算隐函数的一阶和二阶导数（偏导数）等。

（4）讲述对于由曲面一般方程所表示的曲面，如何计算它的切平面方程。

教学安排

一．问题的引入

在讨论一元函数时，我们已经注意到两个变量 x 与 y 间的函数关系有时未必能表示为显函数 $y=f(x)$ 的形式。设 F 是一个二元函数，由它导出的方程 $F(x,y)=0$ 在一定条件下确定了 x 与 y 间的函数关系，我们称这类函数为隐函数。在什么条件下，隐函数是存在的？这个函数是否连续、可导？又如何求隐函数的导数？这些自然是人们关心的问题。对于多元函数和多元函数组（即向量值函数），同样提出了是否能由变量间满足的方程或方程组，确定相应的变量间的函数关系，以及这些函数是否可微等问题。

先考察一个简单的方程

$$x^2+y^2-1=0\text{。}$$

它对应于平面上的单位圆周。容易知道在上半圆周（或下半圆周）上，除 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 这两点外，任何点处都能取到一个邻域，在此邻域内，由方程 $x^2+y^2-1=0$ 唯一确定了 x 与 y 间的函数关系，即 $y=\sqrt{1-x^2}$ （$y=-\sqrt{1-x^2}$），其图象恰好是单位圆周落在该邻域中的一段弧。我们注意到圆周上在这种点处的切线斜率都是有限值。另一方面，在 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 的任何邻域内，一个 x 值可能有两个满足方程

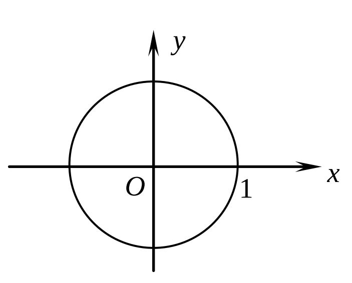

图 7. 4. 1

$x^2+y^2-1=0$ 的 y 值与之对应，因而不能确定 x 与 y 间的函数关系。这说明，隐函数存在是有一定条件的。

二．一元函数的隐函数存在定理

若将单位圆周方程写为

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0,$$

易发现，$(1,0)$和$(-1,0)$是使得$F_y(x,y)=0$的仅有的两个点，这提示$F_y(x,y)\neq 0$对于确定y是x的隐函数可能有着重要作用。进一步，若方程$F(x,y)=0$确实决定了y是x的函数，如果$y=y(x)$可导，$F(x,y)$可微，则由$F(x,y(x))\equiv 0$及复合函数的链式规则，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F(x,y(x))}{\mathrm{d}x}&=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\&=F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\end{aligned}$$

因此若$F_y(x,y)\neq 0$，则可得到$y=y(x)$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$。这又说明条件“$F_y(x,y)\neq 0$”可能具有举足轻重的意义。

事实上，我们有下面的定理：

定理 7.4.1（隐函数存在定理） 设二元函数F在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$O(P_0,r)$上有定义，而且

（1）$F(x_0,y_0)=0$；

（2）在$B(P_0,r)$中，F的偏导数F_x'，F_y'连续；

（3）$F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，

则存在$\delta>0$和在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中唯一确定的一元函数f，使得

（1）$F(x,f(x))=0$（$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$），且$y_0=f(x_0)$；

（2）f在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上可微，而且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}。$$

我们略去这个定理中隐函数存在性的证明。当隐函数f存在时，由前面提到的，从$F(x,f(x))=0$，两边对x求导，即得

$$F_x'+F_y'f'(x)=0。$$

由F_y'的连续性，在(x_0,y_0)的某邻域中$F_y'\neq 0$，所以$f'(x)=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$。这就是定理中关于隐函数导数的关系式。

例 反映行星运动的Kepler方程为

$$y-x-\varepsilon\sin y=0 \quad (0<\varepsilon<1),$$

讨论它确定y关于x的隐函数的存在性与可微性。

注 在这个方程中，这里x是时间，y是行星与太阳的连线扫过的扇形的弧度，ε是行星运动的椭圆轨道的离心率。从天体力学上考虑，y必定是x的函数，但要将函数关系用显式表达出来却无能为力。

解 记$F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y$。易得$F(0,0)=0$，$F_x'(x,y)=-1$，且

$$F_y'(x,y)=1-\varepsilon\cos y>0。$$

显然，F，F_x'，F_y'均是$\mathbf{R}^2$上的连续函数。因而，在原点附近由Kepler方程唯一地确定了y关于x的隐函数关系，这个隐函数是可微的，而且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}。$$

三．多元函数的隐函数存在定理

在定理 7.4.1 中，一元隐函数 $y=f(x)$ 是由二元函数 F 满足的方程 $F(x,y)=0$ 导出的。如果形式上把自变量 $\boldsymbol{x}$ 视为 $\mathbf{R}^n$ 中的元，F 视为 $n+1$ 元函数，则相应的结论便是多元隐函数的存在与可微性定理。

定理 7.4.2 设 $n+1$ 元函数 F 在点 $P_0(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},y_0)$ 的某邻域 $O(P_0,r)$ 上有定义，而且

（1） $F(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},y_0)=0$；

（2）在 $O(P_0,r)$ 中，F 的各偏导数 $F_{x_i}'(i=1,\cdots,n)$，F_y' 均连续；

（3） $F_y'(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},y_0)\neq 0$，

则存在 $\delta>0$ 和在 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 的 δ 邻域上定义的 n 元函数 f，使得

（1） $F(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n))=0$（$(x_1,\cdots,x_n)\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)$），且 $y_0=f(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$；

（2） f 在 $O(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 上可微，而且

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y}{\partial x_n}\end{pmatrix}=-\frac{1}{F_y'}(F_{x_1}' \quad \cdots \quad F_{x_n}')。$$

例 求由 $1+yz+x^2z^2+z^3=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 以及它们在点 $(1,1,-1)$ 处的值。

解 记 $F(x,y,z)=1+yz+x^2z^2+z^3$，可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{-2xz^2}{y+2x^2z+3z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{-z}{y+2x^2z+3z^2}。$$

由此又得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,-1)}=-1,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,-1)}=\frac{1}{2}。$$

例 设二元函数 F 的两个偏导数连续，$z=z(x,y)$ 是由 $F(x-z,y+z)=0$ 所确定的隐函数，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解 记 $u=x-z,v=y+z$，则 $F(x-z,y+z)=0$，即

$$F(u,v)=0。$$

将此方程两端关于 x 求偏导数，得

$$F_u'\frac{\partial u}{\partial x}+F_v'\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

即

$$F_u'\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_v'\frac{\partial z}{\partial x}=0。$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u'}{F_u'-F_v'}。$$

同样，将 $F(u,v)=0$ 两边同时关于 y 求偏导数，可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_v'}{F_u'-F_v'}。$$

本例中如引入 $f(x,y,z)=F(x-z,\ y+z)$，则由定理 7.4.2 同样可得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}=-\frac{1}{f_z'}\begin{pmatrix}f_x' & f_y'\end{pmatrix}=-\frac{1}{-F_u'+F_v'}\begin{pmatrix}F_u' & F_v'\end{pmatrix}=\frac{1}{F_u'-F_v'}\begin{pmatrix}F_u' & F_v'\end{pmatrix}。$$

例 设方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 确定 z 为 x,y 的函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 在方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 两边对 x 求偏导，得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial x},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$。

再对上一等式两边对 x 求导偏得

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2-z}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}。$$

在方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 两边对 y 求偏导，得

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial z}{\partial y},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}$。

再对上一等式两边对 x 求偏导，得

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{2-z}=\frac{xy}{(2-z)^3}。$$

四．空间曲面的切平面

设一个空间曲面由形如

$$F(x,y,z)=0$$

的方程给出，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上的一点。如果 F 的三个一阶偏导数在 P_0 的某邻域中存在且连续，$F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则由定理 7.4.2 可知，在 (x_0,y_0) 的某邻域中由此方程确定了一个函数 $z=f(x,y)$。由第二节的结论可知，曲面在 P_0 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = -f_x'(x_0, y_0)\boldsymbol{i} - f_y'(x_0, y_0)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

$$= \left.\frac{F_x'}{F_z'}\right|_{P_0}\boldsymbol{i} + \left.\frac{F_y'}{F_z'}\right|_{P_0}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \left.\frac{1}{F_z'}(F_x'\boldsymbol{i} + F_y'\boldsymbol{j} + F_z'\boldsymbol{k})\right|_{P_0} 。$$

记 $\boldsymbol{N} = (F_x'\boldsymbol{i} + F_y'\boldsymbol{j} + F_z'\boldsymbol{k})\big|_{P_0}$， $\boldsymbol{N}$ 也是 $F(x, y, z) = 0$ 在 P_0 处的法向量。

对于一般形式的方程

$$F(x, y, z) = 0$$

而言，变量 x, y, z 的地位是相同的，因而，只要 F_x', F_y', F_z' 之一不为 0，上述 $\boldsymbol{N}$ 便是曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在点 P_0 处的法向量。于是，该曲面在 P_0 处的切平面方程即

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 。$$

例 试求椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在点 $P\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 处的切平面方程。

解 记 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$。椭球面方程即 $F(x, y, z)$ =0，它在点 P 处的法向量为

$$\boldsymbol{N} = \left.\left(\frac{2x}{a^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{b^2}\boldsymbol{j} + \frac{2z}{c^2}\boldsymbol{k}\right)\right|_P = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\boldsymbol{i}}{a} + \frac{\boldsymbol{j}}{b} + \frac{\boldsymbol{k}}{c}\right)。$$

因而椭球面在点 P 处的切平面方程为

$$\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{b}\left(y - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

即

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3} 。$$

例 已知曲面 Σ： $e^{2x-z} = f(\pi y - \sqrt{2}z)$，其中 f 为具有连续导数的一元函数。证明 Σ 为柱面。

证 要证明曲面 Σ 为柱面，只要证 Σ 上任意一点的切平面都平行于一条定直线，即证 Σ 上任意一点的法向量垂直于一个定向量。

曲面 Σ 的方程即为 $F(x, y, z) = e^{2x-z} - f(\pi y - \sqrt{2}z) = 0$ 。所以曲面 Σ 上任一点 (x, y, z) 的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z) = \left(2e^{2x-z}, -\pi f'(\pi y - \sqrt{2}z), -e^{2x-z} + \sqrt{2}f'(\pi y - \sqrt{2}z)\right)。$$

设定向量为 $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$，要使 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，只要 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0$，即

$$2le^{2x-z} - \pi mf'(\pi y - \sqrt{2}z) - ne^{2x-z} + \sqrt{2}nf'(\pi y - \sqrt{2}z) = 0 。$$

只要取

$$l = \pi, \quad m = 2\sqrt{2}, \quad n = 2\pi,$$

即

$$\boldsymbol{a} = (\pi, 2\sqrt{2}, 2\pi),$$

则 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ 。即曲面 Σ 上任意一点的法向量垂直于定向量 $\boldsymbol{a} = (\pi, 2\sqrt{2}, 2\pi)$，因此 Σ 为柱面。

证毕

五．进一步的问题

作为本节讨论的继续，下一节将讨论：

1．由函数方程组如何确定向量值隐函数函数的问题；

2．进一步的几何应用。

六．习　题

1； 2．(1)，(3)，(4)；3；4；5；6；10；11；12。