教 案

线性方程组

教学内容

线性方程组是最简单、最常见的方程组，关于它的解法和理论是线性代数的基础和基本工具，并广泛应用于生产实践之中。本节主要解答以下问题：

（1） 线性方程组何时有解，即有解的条件是什么？

（2） 如果线性方程组有解，会有多少解？

（3） 在线性方程组有解时，如何给出全部解？

教学思路与要求

（1） 结合讲解齐次线性方程组的一般性解法，引入基础解系的概念，并指出其次线性方程组的解的结构；

（2） 由于上一部分内容比较抽象，因此要用具体实例详细说明求齐次线性方程组的基础解系的方法，以及通解的表示方法；

（3） 引入非齐次线性方程组的增广矩阵的概念，并证明非齐次线性方程组有解的充要条件；

（4） 讲解非齐次线性方程组的解的结构，由此引出并重点讲解非齐次线性方程组的解法；

（5） 结合实例讲解如何判断线性方程组有解、有唯一解及有无穷多解。

教学安排

一．齐次线性方程组

现在考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.6.1}$$

可解的条件以及在有解的情况下求解的方法。上述方程组用矩阵表示为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}。$$

可解的条件以及在有解的情况下求解的方法。

先看齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的情况。显然它至少有平凡解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，那么是否还有其它的解呢？利用第 4 节的结论便得到：

定理 4.6.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，则齐次线性方程组

$$Ax = \mathbf{0}$$

的解存在且唯一（即只有零解）的充分必要条件是:

$$\text{rank}\,(A) = n,$$

即 A 是列满秩的。

推论 4.6.1 若齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 中的方程个数少于未知量个数（即 $m<n$），则其必有非零解。

当 A 不是列满秩时，设 $\text{rank}\,(A) = r < n$，由定理 4.5.3，存在 A 的一个 r 阶子式不等于零，不妨设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

否则只要进行适当的行交换或列交换就可以了（行交换相当于交换方程的次序，而列交换相当于交换变量的次序，这与原方程是同解的）。于是，A 的前 r 行是极大无关组，可以由它们的线性组合表出第 $r+1, r+2, \cdots, m$ 行，因此原方程组（4.6.1）与其前 r 个方程构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4.6.2}$$

同解（请读者考虑为什么）。将其改写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{4.6.3}$$

记

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{1r+1} & a_{1r+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2r+1} & a_{2r+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{rr+1} & a_{rr+2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}。$$

则方程组（4.6.3）可以写成

$$A_{11}\,x_1 = -A_{12}\,x_2,$$

因此得到

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I_{n-r} \end{pmatrix} x_2 。$$

于是，只要确定了 x_2，就唯一确定了 x。

记$-\boldsymbol{A}_{11}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r})$，这里$\boldsymbol{\beta}_i$（$i=1,2,\cdots,n-r$）为$r$维列向量。显然，$\boldsymbol{x}_2$可以是任意的$n-r$维向量，所以方程组的解$\boldsymbol{x}$有无穷多个。如取$\boldsymbol{x}_2$分别为$n-r$维向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，⋯，$\boldsymbol{e}_{n-r}$（$\boldsymbol{e}_i$的第$i$个分量为 1，其余为 0，$i=1,2,\cdots,n-r$），由定理 4.4.2，可得到一组线性无关的解

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{e}_1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{x}^{(n-r)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_{n-r}\\ \boldsymbol{e}_{n-r}\end{pmatrix}。\tag{4.6.4}$$

对方程组的任意一个解$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}$，记相应的$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_{n-r}\end{pmatrix}$，即$\boldsymbol{x}_2=\sum_{i=1}^{n-r}\xi_i\boldsymbol{e}_i$，于是

$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}_{11}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{n-r}\xi_i\boldsymbol{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{n-r}\xi_i\left(\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}_{11}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n-r}\xi_i\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_i\\ \boldsymbol{e}_i\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n-r}\xi_i\boldsymbol{x}^{(i)},$$

所以，$\boldsymbol{x}$能够由（4.6.4）线性表示。

定义 4.6.1 若n维向量组$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(p)}$满足

（1）每一个向量$\boldsymbol{x}^{(i)}$都是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解（$i=1,2,\cdots,p$）;

（2）向量组$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(p)}$线性无关;

（3）齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的任意一个解都能够用$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(p)}$线性表示，则称$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(p)}$为方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个**基础解系**，而称

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{p}c_i\boldsymbol{x}^{(i)}\quad（c_i\text{是任意常数，}i=1,2,\cdots,p）$$

为方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的**通解**。

显然，求出了基础解系，就完全清楚了解的结构（要注意的是，$\boldsymbol{x}_2$不一定取为$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，⋯，$\boldsymbol{e}_{n-r}$，也就是说，基础解系的形式是不唯一的）。

综合以上推导便得到：

定理 4.6.2 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，其秩为r（$r<n$）。那么齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的每个基础解系中恰有$n-r$个解$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n-r)}$，而且该方程组的任何一个解$\boldsymbol{x}$都可以表为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n-r}c_i\boldsymbol{x}^{(i)},$$

其中c_i（$i=1,2,\cdots,n-r$）是常数。

推论 4.6.2 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，则齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

当$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$时只有唯一解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$; 当$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$时有无穷多组解。

从以上推导中可以看出，当$r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$时，为求方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，可先用初等行变换将它的系数矩阵化为（必要时要交换列的位置）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}。$$

此时，由 $-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-r})$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 合并组成的向量 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_i \\ \boldsymbol{e}_i \end{pmatrix}$（$i=1, 2, \cdots, n-r$）就是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$$

的一个基础解系。注意，若有列交换时，相应的分量位置要作适当调整。

例 4. 6. 1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 11x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 11x_3 + 7x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系。

解　由例 4.5.2 可知，可以通过初等行变换将系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 11 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 11 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

转化为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & -19 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 32 & 15 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

再用初等行变换将此矩阵化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{40}{32} & \frac{40}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{99}{32} & \frac{59}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{32} & -\frac{7}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

于是可得方程组的一组基础解系

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{pmatrix} \frac{40}{32} \\ \frac{99}{32} \\ -\frac{15}{32} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 40 \\ 99 \\ -15 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{pmatrix} -\frac{40}{16} \\ -\frac{59}{16} \\ \frac{7}{16} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -40 \\ -59 \\ 7 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}。$$

因此方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}$ （c_1，c_2 是任意常数）。

例 4. 6. 2 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2 \qquad -x_4=0, \\ -x_1-2x_2+3x_3+2x_4=0, \\ x_1+2x_2-9x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

的通解。

解　通过初等行变换将系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

转化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6.5}$$

再交换 2 和 3 列将此矩阵化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

因此方程组的一组基础解系为

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}。$$

注意：因为交换了 2 和 3 列的位置，因此 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{x}^{(2)}$ 的 2 和 3 行的位置也相应于矩阵进行了交换。

因此方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}$（$c_1$， c_2 是任意常数）。

事实上，以矩阵（4.6.5）为系数矩阵的齐次方程为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-\dfrac{1}{2}x_4=0, \\ x_3+\dfrac{1}{2}x_4=0, \end{cases} \tag{4.6.6}$$

把方程组中含 x_2, x_4 的项移到等号右边得

$$\begin{cases} x_1=-2x_2+\dfrac{1}{2}x_4, \\ x_3=-\dfrac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_2+\frac{1}{2}x_4\\x_2\\-\frac{1}{2}x_4\\x_4\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},$$

其中 x_2， x_4 为任意常数。

分别给 x_2,x_4 以值 1，0 和 0，1，又得到了基础解系

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}。$$

这也是求基础解系和方程组通解的一种方法。

二．非齐次线性方程组

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，rank $(\boldsymbol{A})=r$， $\boldsymbol{b}$ 为 m 维列向量。

定义 4.6.2 矩阵（$\boldsymbol{A}$ ┆ $\boldsymbol{b}$）称为线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

的**增广矩阵**。

下面的定理说明，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的可解性，是与其增广矩阵密切相关的。

定理 4.6.2 线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

的解存在的充分必要条件是：其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩，即

$$\text{rank}\,(\boldsymbol{A})=\text{rank}\,(\boldsymbol{A}\ ┆\ \boldsymbol{b})。$$

证 线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

的解存在等价于 $\boldsymbol{b}$ 可以用 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示，这又等价于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组就是增广矩阵($\boldsymbol{A}$ ┆ $\boldsymbol{b}$)的列向量组的极大无关组，因此

$$\text{rank}\,(\boldsymbol{A})=\text{rank}\,(\boldsymbol{A}\ ┆\ \boldsymbol{b})。$$

证毕

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是一个固定的向量，满足 $\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{b}$，我们称其为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个**特解**。当 $r<n$ 时，对于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{x}$，由于

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\ ,$$

因此 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是齐次方程组的解，由前面的叙述，它必可表示为

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=\sum_{i=1}^{n-r}c_i\boldsymbol{x}^{(i)}\ ,$$

其中 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n-r)}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。于是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\sum_{i=1}^{n-r}c_i\boldsymbol{x}^{(i)}\qquad（c_i\text{ 是任意常数，}i=1,2,\cdots,n-r），$$

它称为非齐次线性方程组的**通解**。这说明，非齐次线性方程组的通解等于其相应

的齐次线性方程组的通解加上该非齐次线性方程组的一个特解。

推论 4.6.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})$ 时有解。此时，当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n$ 时只有唯一解；当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})<n$ 时有无穷多组解。

实际求解的过程与齐次线性方程组的情况相仿，只是多求一步特解而已。设 $\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A})=r$，并设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0\text{。}$$

将原方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 转化为同解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r+a_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r+a_{2r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r+a_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+a_{rn}x_n=b_r, \end{cases}\tag{4.6.7}$$

将其改写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n, \end{cases}$$

利用前面的记号，并记 $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$，便得到

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2\,,$$

令 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0}$，就得到类似（4.6.4）的齐次线性方程组的一组基础解系

$$\boldsymbol{x}^{(1)},\quad \boldsymbol{x}^{(2)},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{x}^{(n-r)}\text{。}$$

为求特解，可令 $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$，得到非齐次线性方程组的一个特解

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}{}^{-1}\boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\text{。}$$

从而得到非齐次线性方程组的通解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\sum_{i=1}^{n-r}c_i\ \boldsymbol{x}^{(i)}\quad（c_i\text{是任意常数，}i=1,2,\cdots,n-r\text{）。}$$

从以上推导中可以看出，在求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解时，先用初等行变换将它的增广矩阵

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}),$$

化为（必要时要交换列的位置，这时变量也要作相应交换，但常数列 $\boldsymbol{b}$ 不能与其它列交换）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} & \tilde{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & * \end{pmatrix}。$$

如果矩阵中*位置的元素不全为零，那么方程组无解。如果*位置的元素都为零，那么 $-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r})$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 合并组成的向量 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_i \\ \boldsymbol{e}_i \end{pmatrix}$（$i=1,2,\cdots,n-r$）就是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，而 $\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 就是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解。注意，若有列交换时，相应的分量位置要作适当调整。

例 4.6.3 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 5x_1-x_2+11x_3+2x_4=4, \\ 3x_1-x_2-5x_3-3x_4=6, \\ x_1-x_2+11x_3+7x_4=-6 \end{cases}$$

的通解。

解 由例 4.5.2，已知可以通过初等行变换将增广矩阵

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 11 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 11 & 7 & -6 \end{array}\right)$$

作初等行变换得到

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -\frac{40}{32} & \frac{40}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{99}{32} & \frac{59}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{32} & -\frac{7}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)。$$

因此齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 40 \\ 99 \\ -15 \\ 32 \end{pmatrix};$$

非齐次线性方程组的一个特解为

$$\boldsymbol{x}_0=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 40 \\ 59 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而非齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 40 \\ 59 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 40 \\ 99 \\ -15 \\ 32 \end{pmatrix} \quad （c \text{ 是任意常数}）。$$

例 4.6.4 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad\ - x_4 = -3, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -21 \end{cases}$$

的通解。

解　通过初等行变换将增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -9 & -5 & -21 \end{array}\right)$$

转化为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{4.6.8}$$

再交换 2 和 3 列将此矩阵化为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)。$$

因此方程组的一组基础解系为

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}。$$

一个特解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{13}{6} \\ 0 \end{pmatrix}。$$

注意，因为交换了 2 和 3 列的位置，因此 $\boldsymbol{x}_0$， $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{x}^{(2)}$ 的 2 和 3 行的位置也相应于矩阵进行了交换。

因此方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)}$ （c_1， c_2 是任意常数）。

事实上，以（4.6.8）确定的方程组为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-\dfrac{1}{2}x_4=-\dfrac{3}{2}, \\ x_3+\dfrac{1}{2}x_4=\dfrac{13}{6}, \end{cases}$$

把方程组中含 x_2,x_4 的项移到等号右边得

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{3}{2}-2x_2+\dfrac{1}{2}x_4, \\ x_3=\dfrac{13}{6}-\dfrac{1}{2}x_4, \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2}-2x_2+\dfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 \\ \dfrac{13}{6}-\dfrac{1}{2}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ 0 \\ \dfrac{13}{6} \\ 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 x_2， x_4 是任意常数。

这也是求方程组通解的一种方法。

例 4.6.5 讨论非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=\lambda, \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=\lambda, \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=\lambda \end{cases}$$

的解的情况（λ 是常数）。

解 其系数矩阵是方阵，先求它的行列式。可以算出

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)^3 。$$

所以，当 $\lambda\neq-3$ 和 1 的时候，方程组有唯一解

$$\boldsymbol{x}=\lambda\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

当 $\lambda=-3$ 时考虑增广矩阵

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right),$$

通过行变换将其转化为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} -3 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right),$$

因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \neq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$，方程组无解。

当 $\lambda = 1$ 时考虑增广矩阵

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

通过行变换将其转化为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

这时方程组有解。考虑同解方程组

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

即 $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$，由此得到非齐次方程组的通解

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 x_2, x_3 和 x_4 是任意常数。

例 4.6.6 设 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2, 3)^T$，$\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 3, 5)^T$，$\boldsymbol{a}_3 = (1, -1, \alpha + 2, 1)^T$，$\boldsymbol{a}_4 = (1, 2, 4, \alpha + 8)^T$，$\boldsymbol{b} = (1, 1, \beta + 3, 5)^T$。问

（1） α，β 为何值时，$\boldsymbol{b}$ 不能表示为 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ 的线性组合？

（2）α，β 为何值时，$\boldsymbol{b}$ 能表示为 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ 的线性组合？并在有唯一表示时，写出表达式。

解 设 $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4$，按分量写出来就是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (\alpha + 2)x_3 + 4x_4 = \beta + 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (\alpha + 8)x_4 = 5. \end{cases}$$

考虑增广矩阵

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha + 2 & 4 & \beta + 3 \\ 3 & 5 & 1 & \alpha + 8 & 5 \end{array}\right),$$

对它作如下初等行变换：

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & \alpha+2 & 4 & \beta+3\\ 3 & 5 & 1 & \alpha+8 & 5\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & \alpha & 2 & \beta+1\\ 0 & 2 & -2 & \alpha+5 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & \beta\\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0\end{array}\right)。$$

因此：

（1）当$\alpha=-1$且$\beta\neq 0$时，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})=3$，方程组无解，即$\boldsymbol{b}$不能表示为$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$的线性组合；

（2）当$\alpha=-1$且$\beta=0$时，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})=2$，方程组有无穷多组解，此时$\boldsymbol{b}$能表示为$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$的线性组合。事实上，此时$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_2$。

当$\alpha\neq-1$时，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})=4$，方程组有唯一解$x_1=-\dfrac{2\beta}{\alpha+1}$，$x_2=\dfrac{\alpha+\beta+1}{\alpha+1}$，$x_3=\dfrac{\beta}{\alpha+1}$，$x_4=0$。此时，$\boldsymbol{b}$能唯一地表示为$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$的线性组合，且

$$\boldsymbol{b}=-\frac{2\beta}{\alpha+1}\boldsymbol{a}_1+\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+1}\boldsymbol{a}_2+\frac{\beta}{\alpha+1}\boldsymbol{a}_3+0\cdot\boldsymbol{a}_4。$$

三．Gauss 消元法

在实际问题中，当未知量个数和方程个数很大时，上述求解方法往往不便操作，因此需要另外寻求实际可行的方法。

我们已经知道，对于非齐次的线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，只要它有解，即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})=r,$$

总是将其转化为同解方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1\,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2\,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r\,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n.\end{cases}$$

令$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$中的一个为 1，其余的为 0，找出它对应的齐次方程组的一个基础解系；再令它们全部为 0，找到非齐次方程组的一个特解。

因此，不失一般性，可以假定我们要解的是 **n 阶线性方程组**（即方程组中方程的个数和未知量的个数都是n）

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

且其系数矩阵$\boldsymbol{A}$非奇异，所以它有唯一解。

前面已经说过，当方程组的阶数较低时，用 Cramer 法则（或直接求出系数

矩阵的逆阵）求解不失为可行的办法。但是当方程组的阶数很高时，这将导致计算量的急剧增加，同时由于大量运算过程中四舍五入的影响，可能造成误差的急速放大，使得计算结果与方程组的精确解大相径庭，甚至根本不能用。

以前提到过的用消元法求解多元一次方程组的方法称为 **Gauss 消元法**，具有计算量小、误差小、容易编程等优点，是实际求解线性方程组最常用的方法。我们用增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

来描述它的做法（为了简单起见，仍用原来的记号记改变后的元素）。

首先，由于 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，因此它的第 1 列中至少有一个元素不为零。从第 1 列中挑选一个绝对值最大的元素，称其为**主元**。将其所在的行换到第 1 行，这个步骤称为**列选主元**。然后用选主元后的第 1 行乘 $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ 依次加到第 k 行（$k=2,3,\cdots,n$），使第 1 列在对角线以下的元素变为 0（由于 a_{11} 是第 1 列中绝对值最大的，因此 $\left|\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right| \le 1$，这样，即使计算过程中产生了误差，也不会因为乘了 $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ 而使误差放大，这就是选主元的意义）。

做了 $i-1$ 次之后（$i=2,3,\cdots,n-1$）的情况为

$$\left(\begin{array}{cccccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1\,n} & b_1 \\ & \ddots & \ddots & \cdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{i\,i} & a_{i\,i+1} & \cdots & a_{i\,n} & b_i \\ & & a_{i+1\,i} & a_{i+1\,i+1} & \cdots & a_{i+1\,n} & b_{i+1} \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{n\,i} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right),$$

由于它的第 i 列从第 i 行开始的元素中至少有一个不为零（请读者思考原因），在第 i 列的这些元素中再选主元，用选主元后的第 i 行乘 $-\frac{a_{ki}}{a_{ii}}$ 依次加到第 k 行（$k=i+1,i+2,\cdots,n$），使第 i 列在对角线以下的元素变为 0。

这样，便得到（系数矩阵第 i 行第 j 列元素仍记为 a_{ij}，尽管它们可能已发生变化；对于 $\boldsymbol{b}$ 中元素也是如此）

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \quad （\prod_{k=1}^{n} a_{kk} \neq 0）$$

这就完成了消元过程。

然后，对方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

进行回代，从后往前逐个解出

$$\begin{cases} x_n = b_n / a_{nn}, \\ x_i = (b_i - a_{i\,i+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n) / a_{i\,i} \\ \quad = (b_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k) / a_{i\,i} \qquad (i = n-1, n-2, \cdots, 1). \end{cases}$$

对于n阶线性方程组，Gauss 消元法的计算量大约是$\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$。

例 4.6.7 用 Gauss 消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 3, \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 3, \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

解 方程组的增广矩阵为（以下带有方框的元素为主元）

$$(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc:c} \boxed{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{array}\right)。$$

用行初等变换将主元下的元素变为 0 得

$$\left(\begin{array}{cccc:c} \boxed{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{15}{8} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \boxed{\frac{15}{8}} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{array}\right)。$$

第二行与第三行互换，再继续得

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{15}{8}} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{15}{8} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{28}{15}} & -\frac{8}{15} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{15} & \frac{28}{15} & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{28}{15} & -\frac{8}{15} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} \end{array}\right)。$$

于是线性方程组的解为

$$x_1=1，\ x_2=2，\ x_3=2，\ x_4=1。$$

四．Jacobi 迭代法

从实际问题归结的线性方程组的阶数往往非常高，所以其系数矩阵的元素个数往往是个天文数字。但幸运的是在许多场合下，系数矩阵的元素中绝大多数都是 0 ——它的非零元素一般仅是$O(n)$而不是$O(n^2)$，这样的矩阵称为**稀疏矩阵**。

矩阵的稀疏性对某些运算是很有利的。以矩阵与向量相乘为例，由于零元素不必参加运算，因此一次乘法的总计算量可以从$O(n^2)$降为$O(n)$。一个自然的想法是，应该尽可能在整个运算过程充分利用矩阵的稀疏性质。

Gauss 消元法的最大缺点在于它无法保持原来矩阵的稀疏性。如对下面所示的“箭状矩阵”

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad （\prod_{k=1}^{n} a_{kk}\neq 0），$$

它的非零元素只有约$3n$个。但是只要对第 1 列执行一遍 Gauss 消元法，就会使右下角的$n-1$阶子矩阵的稀疏性破坏殆尽，立即变成充满（或几乎充满）非零元素的矩阵（称之为**满矩阵**）。于是，对 Gauss 消元法而言，稀疏矩阵与满矩阵变得毫无二致，换句话说，稀疏性根本没有起作用。

我们来换一种思路。首先将线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

化成等价的等式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{g}，$$

所谓“等价”是指，对任意向量 $\boldsymbol{x}$，若 $\boldsymbol{x}$ 满足其中的一个等式，那么它也一定满足另一个等式。

然后选取适当的初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 代入右端，将计算结果记为 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，再将 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 代入右端算出 $\boldsymbol{x}^{(2)}$，…，即

$$\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k-1)}+\boldsymbol{g}\,,\quad k=1,2,\cdots,$$

这个过程称为**迭代**。

定义 4.6.3 设 $\boldsymbol{x}^{(k)}=\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\\vdots\\x_n^{(k)}\end{pmatrix}$（$k=1,2,\cdots$）是一列 n 维向量，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 是一个固定的向量，若对 $i=1,2,\cdots,n$，都有

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=a_i\,,$$

则称向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ **收敛于** $\boldsymbol{a}$，记为

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{a}\,。$$

称 $\boldsymbol{a}$ 为 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 的**极限**。

显然，若迭代得到的向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛，则其极限向量就是原线性方程组的解。这样的方法称为解线性方程组的**迭代法**。当然，在实际计算时只能进行有限步。若要求误差范围不超过 ε，一般当 $\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|<\varepsilon$ 时，就用 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 作为解的近似值。根据本课程的要求，这里不对迭代收敛条件作进一步探讨了。

设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素全不为零，将 $\boldsymbol{A}$ 分为对角线部分 $\boldsymbol{D}$、对角线以下部分 $\boldsymbol{L}$ 和对角线以上部分 $\boldsymbol{U}$，

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}0&&&\\a_{21}&0&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&0&\ddots&\vdots\\&&\ddots&a_{n-1,n}\\&&&0\end{pmatrix}。$$

由于 $\boldsymbol{D}$ 可逆，在线性方程组两边左乘 $\boldsymbol{D}^{-1}$，得到

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}\,。$$

记 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$，作迭代序列

$$\boldsymbol{x}^{(k)}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x}^{(k-1)}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k-1)}+\boldsymbol{g}\,,\quad k=1,2,\cdots。$$

与这个迭代序列相应的迭代法称为 **Jacobi 迭代法**。这是一种最简单的迭代法。

例 4.6.8 用 Jacobi 迭代法求解方程组

$$\begin{cases}4x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8,\\x_1+x_2=2,\\x_1+2x_3=3,\\x_1+4x_4=5,\\x_1+5x_5=6.\end{cases}$$

解 可以算出

$$\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 1 & 0 & & & \\ 0.5 & & 0 & & \\ 0.25 & & & 0 & \\ 0.2 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1.5 \\ 1.25 \\ 1.2 \end{pmatrix}。$$

取 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-1, -2, 0, -2, 3)^T$，通过迭代（保留 3 位小数）得到

$$\boldsymbol{x}^{(10)} = \begin{pmatrix} 0.945 \\ 0.929 \\ 0.965 \\ 0.982 \\ 0.986 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(18)} = \begin{pmatrix} 0.997 \\ 0.996 \\ 0.998 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(20)} = \begin{pmatrix} 0.998 \\ 0.998 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}。$$

而精确解是 $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ 。

由于迭代法进行过程中不改变迭代矩阵，同时整个计算只用到矩阵和向量乘法，因此可以有效地利用矩阵的稀疏性节约计算量。在这个例子中，用 Jacobi 方法迭代 20 次与用 Gauss 消元法的计算量相当，也就是说，在矩阵的阶数较低时，迭代法并不见得有优越性。但是对大型稀疏矩阵，两者的效率是无可比拟的。随着应用性问题中归结的方程组的阶在近一、二十年中加速膨胀，当今，迭代法的实际使用价值远远超过了传统的 Gauss 消元法，已经成为求解方程组最基本和最重要的方法。

五．习　　题

1，2，3．（1）、（3），4，6，7。