教　案

微分学中值定理

教学内容

导数和微分是研究函数局部变化性态的有效工具，为了应用这一工具来研究函数的整体性质，需要一个联系局部与整体的桥梁，这就是微分中值定理。它在研究函数的性质和函数估计中起着重要作用，是数学理论研究的一个重要工具。本节主要讲解以下几方面的内容：

（1）　局部极值与 Fermat 定理；

（2）　Rolle 定理、Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理；

（3）　中值定理的初步应用。

教学思路和要求

（1）　首先引入局部极值的概念，再讲解取极值的必要条件：Fermat 定理。要讲清楚这个问题的背景，并且使学生不但能从分析上理解证明过程，而且明白它的几何意义。

（2）　在结合讲解 Rolle 定理、Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理的同时，介绍这些定理证明的几何背景，注意引导学生发挥主动意识，避免死记硬背证明过程。

（3）　中值定理的应用是多方面的，因此在讲解这方面的例题时，要力求讲出解决问题的着手点和思路，注意引导学生思考，能够举一反三，自行解决问题。

教学安排

一．局部极值与 Fermat 定理

为了研究函数的局部性质与整体性质的联系，先要找出其局部的一些显著特征，其中之一就是极值。

定义 2.4.1 设有函数 f，如果在 x_0 的某个邻域 $O(x_0,\delta)$ 上恒成立

$$f(x)\le f(x_0)\qquad（或\quad f(x)\ge f(x_0)），$$

则称 x_0 为函数 f 的**局部极大值点**（或**局部极小值点**），简称为**极大值点**（或**极小值点**），称 $f(x_0)$ 是函数 f 的**局部极大值**（或**局部极小值**），简称为**极大值**（或**极小值**）。

极大值点与极小值点统称为**极值点**，极大值与极小值统称为**极值**。必须注意：极值只取决于点 x_0 邻近函数 f 的性状，即只是在 x_0 的某邻域内才相对地有意义，所以是一种局部性质。

定理 2.4.1（Fermat 定理）　若点 x_0 是函数 f 的一个极值点，且 f 在 x_0 处可导，则必有

$$f'(x_0)=0。$$

证　不妨设在邻域 $O(x_0,\delta)$ 内 $f(x)\le f(x_0)$。于是，当 $x<x_0$ 时成立

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0，$$

当 $x > x_0$ 时成立

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \text{。}$$

由导数定义和极限性质，即得

$$0 \ge \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \text{，}$$

因此， $f'(x_0)$ $=0$。

证毕

Fermat 定理的几何意义是：函数 f 的图象如果在相应于极值的点处有切线的话，那一定是一条水平切线。

注意，极值只取决于函数 f 在点 x_0 邻近的性状，即只是在 x_0 的某个邻域内 $f(x_0)$ 才相对地是最大或最小，所以它是一种局部性质。由于极值的局部性，在同一个区间内，f 的一个极小值完全有可能大于 f 的某些极大值。而且，甚至在有限区间上，函数 f 的极值点都可能有无数个。例如，在区间 $(0,1)$ 上，$x=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$ （$n=0,1,2,\cdots$）都是函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的极值点，且当 n 为偶数时为极大值点，当 n 为奇数时为极小值点。

二．Rolle 定理

为了导出微分学中值定理，我们先介绍它的一种特殊形式。

定理 2.4.2 （**Rolle** 定理） 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证　因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，所以它在 $[a,b]$ 上必定能取得最大值 M 和最小值 m。

如果 $M=m$，显然 f 在 $[a,b]$ 上恒取常值 M，此时可取 (a,b) 内任何一点作为 ξ，而有 $f'(\xi)=0$。

如果 $M>m$，因为 $f(a)=f(b)$，所以 M 和 m 之一必不等于 $f(a)$，不妨设 $M\ne f(a)$（$m\ne f(a)$ 的情况可类似讨论），此时必有点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=M$。因为 f 在 ξ 处可导，且取到最大值，由 Fermat 定理即得 $f'(\xi)=0$.

证毕

Rolle 定理的几何意义是：在定理的条件下，f 的图象上必有一点，该点处的切线与 x 轴平行（见图 2.4.1）。

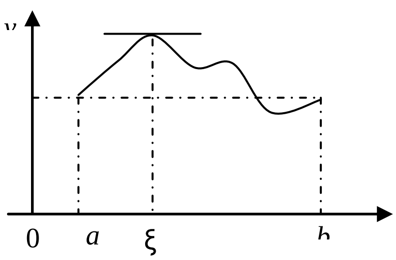

图 2.4.1

容易看出，当函数 f 可导时，条件“ $f'(x_0)=0$ ”只是 x_0 为 f 的极值点的必要条件，而不是充分条件。例如，函数 $f(x)=x^3$，点 $x_0=0$ 不是它的极值点，但 $f'(0)=0$。注意，一个函数的导数不存在的点也可能是该函数的极值点。例如，函数 $f(x)=|x|$，$x=0$ 是 f 的极小值点，但 f 在 $x=0$ 点的导数不存在。

例　在数学物理问题中有一个常用的特殊函数：**Legendre** 多项式，

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]，\quad n=1,2,\cdots。$$

我们用Rolle定理来证明：n次Legendre多项式有n个相异的实根，它们全在$(-1,1)$内。

证 首先，对任何小于n的自然数k，由高阶导数的Leibniz公式，得

$$\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^n]=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{d^i(x-1)^n}{dx^i}\frac{d^{k-i}(x+1)^n}{dx^{k-i}},$$

因而$k<n$时，±1都是多项式$\dfrac{d^k[(x^2-1)^n]}{dx^k}$的根。

由Rolle定理，可知$\dfrac{d}{dx}[(x^2-1)^n]$有一个根$\xi_{11}\in(-1,1)$。

再一次用Rolle定理，可知$\dfrac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^n]$有根$\xi_{21}\in(-1,\xi_{11})$和$\xi_{22}\in(\xi_{11},1)$。

依此类推，得$\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x^2-1)^n]$有$n-1$个根

$$-1<\xi_{n-1,1}<\xi_{n-1,2}<\cdots<\xi_{n-1,n-1}<1。$$

最后，仍根据Rolle定理，$P_n(x)$有n个根

$\xi_{n,1}\in(-1,\xi_{n-1,1})$，$\xi_{n,i}\in(\xi_{n-1,i-1},\xi_{n-1,i})$，$i=2,3,\cdots,n-1$，$\xi_{n,n}\in(\xi_{n-1,n-1},1)$。

证毕

三．微分学中值定理

Rolle定理中$f(a)=f(b)$是一个相当特殊的条件，它使这个定理的应用受到很大的限制，取消这个条件，就得到了十分重要的微分学中值定理（**Lagrange中值定理**）。

定理2.4.3（微分学中值定理） 设函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则至少有一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)。$$

注：在证明之前，先说明一下定理的几何意义。在直角坐标系中作出$[a,b]$上函数f的图象，连结图象上两个端点A，B（图2.4.2），易见弦AB的斜率为$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。中值定理告诉我们，在相应的条件下，可以在图象上找到一点，该点处图象的切线与弦AB平行。

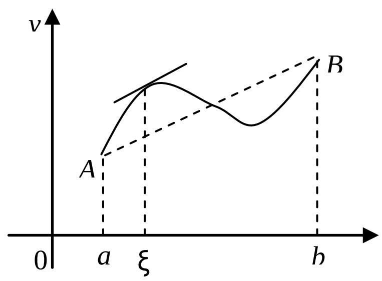

图2.4.2

显然，Rolle定理是Lagrange定理的特殊情况，我们将用构造辅助函数的方法，利用特殊情况下的结论来处理一般的问题。

证 引入辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)，\quad x\in[a,b]。$$

显然，函数φ在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$\varphi(a)=\varphi(b)=f(a)$。由Rolle定理可知至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$\varphi'(\xi)=0$，此即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

这就是所要证明的。

证毕

微分学中值定理的关系式还可写成

$$f(b)=f(a)+f'(a+\theta(b-a))(b-a),$$

其中$0<\theta<1$。如果记$x=a$，$\Delta x=b-a$，则上式可表述为

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

其中$0<\theta<1$。这些关系式都被称作 Lagrange 公式。

我们已经知道常值函数的导数为 0，由微分学中值定理，可以证明：

推论 2.4.1 设 f 是(a,b)上的可微函数，且对任何$x\in(a,b)$，$f'(x)=0$，则 f 在(a,b)上恒为常数。

证 对任何$a<x_0<x_1<b$，由 Lagrange 公式

$$f(x_1)-f(x_0)=f'(\xi)(x_1-x_0)=0,$$

其中$x_0<\xi<x_1$，因此，$f(x_1)=f(x_0)$，从而 f 恒为常数。

证毕

推论 2.4.2 设 f 和 g 均是(a,b)上的可微函数，且 $f'=g'$，则必有常数 c，使得 $f(x)=g(x)+c$ 在(a,b)上恒成立。

证 这只要对函数 $f-g$ 用推论 2.4.1 的结论即可。

证毕

例 证明不等式

$$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|。$$

证 显然, $f(x)=\arctan x$ 在任意区间$[a,b]$上满足 Lagrange 中值定理条件，所以，存在$\xi\in(a,b)$，满足

$$|\arctan a-\arctan b|=|f'(\xi)|\cdot|a-b|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right|\cdot|a-b|,$$

即

$$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|\ 。$$

证毕

例 证明：当$x>0$时成立

$$\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x。$$

证 对函数 arctan 应用 Lagrange 公式，得到

$$\begin{aligned}\arctan x&=\arctan x-\arctan 0\\&=(\arctan x)'|_{x=\xi}\ (x-0)=\frac{x}{1+\xi^2},\end{aligned}$$

其中$0<\xi<x$，注意到$1<1+\xi^2<1+x^2$即得结论。

证毕

例 证明：在$[-1,1]$上成立

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}。$$

证 作函数

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x,\quad x\in[-1,1]。$$

则在$(-1,1)$上成立

$$f'(x)=(\arcsin x)'+(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$
所以由推论 3.1.1 知，在 $(-1,1)$ 上成立
$$f(x)=c。$$
注意到
$$c=f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}。$$
从而在 $(-1,1)$ 上成立
$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}。$$
由于 f 在 $[-1,1]$ 上连续，上式在 $[-1,1]$ 上也成立。

证毕

四．Cauchy 中值定理

作为 Lagrange 中值定理的推广，下面给出 Cauchy 中值定理，它在理论研究中有着重要的应用，下一节就会看到，由此可以导出非常重要的 L' Hospital 法则。

定理 2.4.4 （**Cauchy 中值定理**） 设函数 f 和 g 均在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且当 $x\in(a,b)$ 时 $g'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}。$$

证 由于当 $x\in(a,b)$ 时 $g'(x)\neq 0$，由 Lagrange 公式知 $g(b)-g(a)\neq 0$。作辅助函数
$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)],\quad x\in[a,b],$$
则 φ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)=f(a)$，从而由 Rolle 定理，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$。这就是所要证明的。

证毕

注：当 $g(x)=x$ 时，这个定理又回到了 Lagrange 中值定理，因此 Cauchy 中值定理是 Lagrange 中值定理的一个推广。

Cauchy 中值定理有类似于 Lagrange 中值定理的几何解释：设在直角坐标系中，有以参数方程
$$\begin{cases}x=g(t),\\ y=f(t),\end{cases}\quad t\in[a,b]$$
给出的连续曲线，其中 f，g 都是可微的，那末在曲线上至少能找到一点，该点处曲线的切线与曲线两端的连线平行。

例 证明：当 $x>0$ 时，成立不等式
$$\frac{1}{2(1+x)}<\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}<\frac{1}{2}。$$

证 设 $f(x)=x-\ln(1+x)$，$g(x)=x^2$，则
$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x},\quad g'(x)=2x。$$
当 $x>0$ 时，应用 Cauchy 中值定理得

$$\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\frac{\xi}{1+\xi}}{2\xi}=\frac{1}{2(1+\xi)},$$

其中$0<\xi<x$。注意到$1<1+\xi<1+x$即得结论。

证毕

五．进一步的问题

作为本节讨论的继续和应用，我们接下来将研究不定型的极限、函数的单调性、极值和最值、曲线的凸性、函数图形的描绘和关于函数更精确的近似公式等问题。

六．习　题

1；2；3；4 （2），（3）；5（2）；7；8；9。