教 案

幂级数

教学内容

将初等函数展开成幂级数，是研究函数的表示、性质和进行近似计算的重要方法，也是微积分理论中不可或缺的一个部分。本节介绍幂级数的概念与性质，以及函数如何展开为幂级数问题，进一步还要指出幂级数在近似计算中的应用。具体内容如下：

（1） 幂级数的收敛半径和收敛域的概念及计算方法；
（2） 幂级数的和函数的连续性、逐项可导和逐项可积性质；
（3） 函数的 Taylor 级数的概念及初等函数的 Taylor 展开方法；
（4） 介绍利用函数的 Taylor 展开进行近似计算的方法。

教学思路和要求

（1）介绍函数项级数及其收敛域的概念，进而引出重要的幂级数的概念；

（2）幂级数的收敛域有着独特的对称性，如何计算幂级数的收敛半径和收敛域是一个重点；

（3）幂级数的和函数的连续性、逐项可导和逐项可积性质有着重要应用，因此也是课程中的一个重点，是学生必须要掌握的知识点；

（4）函数的幂级数（Taylor 级数）展开是微积分学中的重要工具，是学生务必要掌握的数学方法。关于这部分内容，首先讲解利用 Taylor 公式，将一些基本的初等函数展开为 Taylor 级数或 Maclaurin 级数。在此基础上，讲解一般初等函数的 Taylor 展开的方法，也就是间接展开法。

（5）介绍函数的幂级数展开的应用，重点在于近似计算。

教学安排

一．函数项级数

现在将级数的概念推广到通项为函数的情况。设 u_n （$n=1,2,\cdots$）是一列定义在数集 I 上的函数（这时也称 $\{u_n\}$ 为**函数序列**），称用加号按顺序将这列函数连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

为**函数项级数**，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 。本章中为叙述方便也常记作 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 。

函数项级数的收敛性可以借助数项级数得到。

定义 9.2.1 若对于固定的 $x_0\in I$ ，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 x_0 收敛，或称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**。这些收敛点全体所构成的

集合D称为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的**收敛域**。

对于收敛域D上的每个x，都对应了一个收敛的数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，记其和为$S(x)$，这样就定义了一个$D$上的函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)，\quad x\in D，$$

它称为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的**和函数**。

和函数也可以如下得到：作$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的**部分和函数**：

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\quad（x\in I），\quad n=1,2,\cdots。$$

显然，使$\{S_n(x)\}$收敛的x全体正是收敛域D。因此$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数$S(x)$就是在$D$上部分和函数序列$\{S_n(x)\}$的极限，即

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)，\quad x\in D。$$

与数项级数一样，在收敛域D上定义

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)，$$

它称为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的**余项**。

例 9.2.1　e^{-nx}（$n=1,2,\cdots$）是一列定义于$(-\infty,+\infty)$上的函数。显然对于每个固定的$x\in(-\infty,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$是等比级数。这个函数项级数的收敛域为$(0,+\infty)$，和函数为$S(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$。

这个例子也说明了函数项级数的收敛域并不一定是原来函数序列的公共定义域。

二．幂级数

以下形式的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

称为**幂级数**，其中a_n（$n=0,1,2,\cdots$）为常数，称为该**幂级数的系数**。

为了方便我们常取$x_0=0$，也就是讨论

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots，$$

因为只要做一个平移$x=t-x_0$，所得的结论便可以平行推广到$x_0\neq 0$的情况。

例如，$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$和$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$都是幂级数。

下面我们将讨论两个方面的问题：第一，对给定的幂级数，它何时是收敛的？具有什么性质？并尝试求出一些幂级数的和函数；第二，对给定的函数，是否可以将它表示为幂级数？如何求初等函数的幂级数展开式？

三．幂级数的收敛半径

一个自然的问题是，幂级数的收敛域是什么样的？下面的定理说明了它的收敛域是一个区间。

定理 9.2.1（Abel 定理） 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$x_0$（$x_0 \neq 0$）点收敛，那么对于一切满足$|x|<|x_0|$的$x$，它绝对收敛；如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$x_0$点发散，那么对于一切满足$|x|>|x_0|$的$x$，它也发散。

证 设x_0（$x_0 \neq 0$）是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛点。根据级数收敛的必要条件，$\lim_{n\to\infty}a_n {x_0}^n = 0$，于是存在正数$M$，使得

$$|a_n {x_0}^n| \le M, \quad n = 0, 1, 2, \cdots。$$

因此，对于满足$|x|<|x_0|$的x有

$$|a_n x^n| = \left|a_n {x_0}^n \cdot \frac{x^n}{{x_0}^n}\right| \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n。$$

由于级数$\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$收敛，因而$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$也收敛，即级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛。

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$x_0$点发散，那么对于满足$|x|>|x_0|$的$x$，它也发散。否则的话，由刚才的证明知道，幂级数在$x$处收敛，就决定了它在$x_0$处收敛，这与假设矛盾。

证毕

这个定理说明，一定存在一个R $(0 \le R \le +\infty)$，使得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛域就是从$-R$到$R$的整个区间（$R$为正实数时可能包含端点也可能不包含端点；$R = 0$时就是一点$x = 0$），并且在区间内部，它绝对收敛。这个区间也称为该幂级数的**收敛区间**，而R称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的**收敛半径**。

根据数项级数的 Cauchy 判别法，若极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x|$$

存在，那么当此极限值小于1时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛；当此极限值大于1时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

发散。如果令 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$，那么显然有

$$R=\begin{cases} +\infty, & A=0, \\ \dfrac{1}{A}, & A\in(0,+\infty), \\ 0, & A=+\infty. \end{cases}$$

这就证明了：

定理 9.2.2 (**Cauchy－Hadamard 定理**) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=A,$$

且 R 同上定义，那么级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<R$ 时绝对收敛；当 $|x|>R$ 时发散。此时 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径。

当 $R=+\infty$ 时，说明幂级数对一切实数 x 都是绝对收敛的；当 $R=0$ 时，说明幂级数仅当 $x=0$ 时收敛。注意在区间的端点 $x=\pm R$ 处，幂级数收敛与否必须另行判断。

由 D'Alembert 判别法，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=A$，则同样也可如上确定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 R。事实上可以证明，这时成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=A$。

例 9.2.2 易计算

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 的收敛半径是 1，收敛域是 $(-1,1)$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径是 1，收敛域为 $[-1,1)$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛半径是 1，收敛域为 $[-1,1]$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛半径是 $+\infty$，因此收敛域为 $R=(-\infty,+\infty)$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n!)x^n$ 的收敛半径是 0，因此收敛域为单点集 $\{0\}$。

例 9.2.3 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}x^n$ 的收敛半径。

解 记 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

所以收敛半径$R=\dfrac{1}{e}$。

例 9.2.4 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$的收敛半径。

解 这是缺项幂级数，x^{2n}（$n=1,2,\cdots$）项的系数为 0，不能直接用上面的公式来计算收敛半径，而采用如下的计算方法。因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3\left[1+(-2/3)^n\right]^{\frac{1}{n}}}|x|^{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}|x|^2,$$

所以，当$\dfrac{1}{3}|x|^2<1$，即$|x|<\sqrt{3}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$收敛；而当$\dfrac{1}{3}|x|^2>1$，即$|x|>\sqrt{3}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$发散。因此由收敛半径的定义，收敛半径$R=\sqrt{3}$。

例 9.2.5 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n$的收敛域。

解 令$t=x-\dfrac{1}{2}$，那么上述级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}t^n。$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}}=\sqrt{2}+1,$$

所以收敛半径为$R=\sqrt{2}-1$。当$t=\sqrt{2}-1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}t^n$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，它是发散的。当$t=-(\sqrt{2}-1)$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}t^n$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，它是收敛的。因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}t^n$的收敛域为$[1-\sqrt{2},\sqrt{2}-1)$。从而幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n$的收敛域是$\left[\dfrac{3}{2}-\sqrt{2},\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)$。

四．幂级数的性质

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径为$R'$，且$R,\ R'>0$。那么$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$都在$|x|<\min(R,R')$上绝对收敛，因此在$|x|<\min(R,R')$上成立

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,$$

以及

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n,$$

上式右边就是这两个级数的 Cauchy 乘积。

现在介绍幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的连续性、可微性和可积性。我们这里仅叙述结论，并给出一些应用这些性质的例子。

定理 9.2.3 （和函数的连续性） 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R（$R>0$），则其和函数在$(-R, R)$连续，即对于每个$x_0 \in (-R, R)$，

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n 。$$

若它在$x=R$（或$x=-R$）收敛，则和函数在$x=R$（或$x=-R$）左（右）连续，即

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \left(\lim_{x\to -R+0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\right)。$$

以上两式意味着求极限运算可以和无限求和运算交换次序。

定理 9.2.4（逐项可积性）设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R（$R>0$），则它在$(-R, R)$上可以逐项积分，即对于任意$x\in(-R, R)$成立

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} 。$$

上式意味着积分运算可以和无限求和运算交换次序。

定理 9.2.5（逐项可导性）设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R（$R>0$），则它在$(-R, R)$上可以逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} 。$$

上式意味着求导运算可以和无限求和运算交换次序。

定理 9.2.6 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R，则$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$和$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$的收敛半径也为$R$。

这就是说，对幂级数逐项积分或逐项求导后所得的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径。

虽然逐项积分后所得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$和逐项求导后所得的幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$与原幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径相同，但收敛域却可能扩大或缩小。

例 9.2.6 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 的和函数。

证 易知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$的收敛半径为 1，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}, \quad x\in(-1,1)。$$

因此对任意 $x\in(-1,1)$，应用逐项积分定理得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}t^{n-1}dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x), \quad x\in(-1,1)。$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 在 $x=1$ 收敛，由定理 9.2.3 就得到一个常用结果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim_{x\to1-0}\ln(1+x)=\ln 2。$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x), \quad x\in(-1,1]。$$

在此例中，显然 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ 的收敛域是 $(-1,1)$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 的收敛域是 $(-1,1]$。

例 9.2.7 将 $\arctan x$ 表示为 x 的幂级数。

解 由于

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}, \quad x\in(-1,1),$$

所以用 x^2 代替 x，可得

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}, \quad x\in(-1,1),$$

两边积分，并利用逐项积分定理，得到

$$\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots, \quad x\in(-1,1)。$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 在 $x=\pm1$ 收敛，由幂级数和函数的连续性可得

$$\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots, \quad x\in[-1,1]。$$

特别地令 $x=1$，有

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots。$$

例 9.2.8 证明：对一切 $x\in(-1,1)$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}。$$

证 我们已经知道幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛半径为 1，且在 $(-1,1)$ 上成立

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\text{。}$$

对此式两边求导，并利用逐项求导定理即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\text{，}\quad x \in (-1,1)$$

两边同时乘以 x，便得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}\text{，}\quad x \in (-1,1)\text{。}$$

作为这个结果的应用，我们来求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ 的和。

在上式中令 $x = \frac{1}{3}$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{4}\text{，}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\text{。}$$

例 9.2.9 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数。

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}} = 1\text{，}$$

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径 $R=1$。令

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\text{，}\quad x \in (-1,1)\text{。}$$

应用幂级数的逐项可导性，可得

$$(xS(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\text{，}$$

$$(xS(x))'' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}\text{，}\quad x \in (-1,1)\text{。}$$

对上一等式两边从 0 到 x 积分，注意到 $(xS(x))'\big|_{x=0} = 0$，便得

$$(xS(x))' = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x)\text{。}$$

再积分一次，注意到 $xS(x)\big|_{x=0} = 0$，便得

$$xS(x) = -\int_0^x \ln(1-x)dx = (1-x)\ln(1-x) + x \text{。}$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = S(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + 1, & x \in (-1,1), x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然，当 $x = \pm 1$ 时上式左边的级数收敛，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \begin{cases} \dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + 1, & x \in [-1,1), x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

五．函数的 Taylor 级数

幂级数有着良好的性质，因此如果一个函数在某一区间上能够表示成一个幂级数，将给理论研究和实际应用带来极大方便。下面我们就来讨论函数可以表示成幂级数的条件，以及如何将函数表示成幂级数。

由 Taylor 公式，若函数 f 在 x_0 的某个邻域上具有 $n+1$ 阶导数，那么在该邻域上成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x) \text{，}$$

其中 $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$0 < \theta < 1$）为 Lagrange 余项。因此可以用多项式

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

来近似 $f(x)$。人们自然会猜想，增加这种多项式的次数，就可能会增加近似的精确度，因此可用以这种多项式为部分和的幂级数来表示函数。基于这种思想，若函数 f 在 x_0 的某个邻域 $O(x_0, r)$ 上任意阶可导，构造幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{，}$$

这一幂级数称为 f 在 x_0 点的 **Taylor 级数**，记为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{。}$$

而称

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad （k = 0,1,2,\cdots）$$

为 f 在 x_0 点的 **Taylor 系数**。特别地，当 $x_0 = 0$ 时，常称

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

为 f 的 **Maclaurin 级数**。

自然要考虑的问题是，若函数 f 在 x_0 的某个邻域 $O(x_0,r)$ 上可表示成幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\text{，}\quad x\in O(x_0,r)\text{，}$$

该幂级数是否就是 f 在 x_0 点 Taylor 级数？答案是肯定的。根据幂级数的逐项可导性，f 必定在 $O(x_0,r)$ 上任意阶可导，且对一切 $k\in\mathbf{N}^+$，成立

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}\text{。}$$

令 $x=x_0$ 便得

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\text{，}\quad k=0,1,2,\cdots\text{。}$$

因此，如果一个函数可以表示成幂级数，那么该幂级数就是它的 Taylor 级数，或者说，幂级数就是其和函数的 Taylor 级数。

另一个必须面对的问题是：若函数 f 在 x_0 的某个邻域 $O(x_0,r)$ 上任意阶可导，是否成立 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$？答案却是否定的，即，一个任意阶可导函数的 Taylor 级数并非一定能收敛于该函数本身。

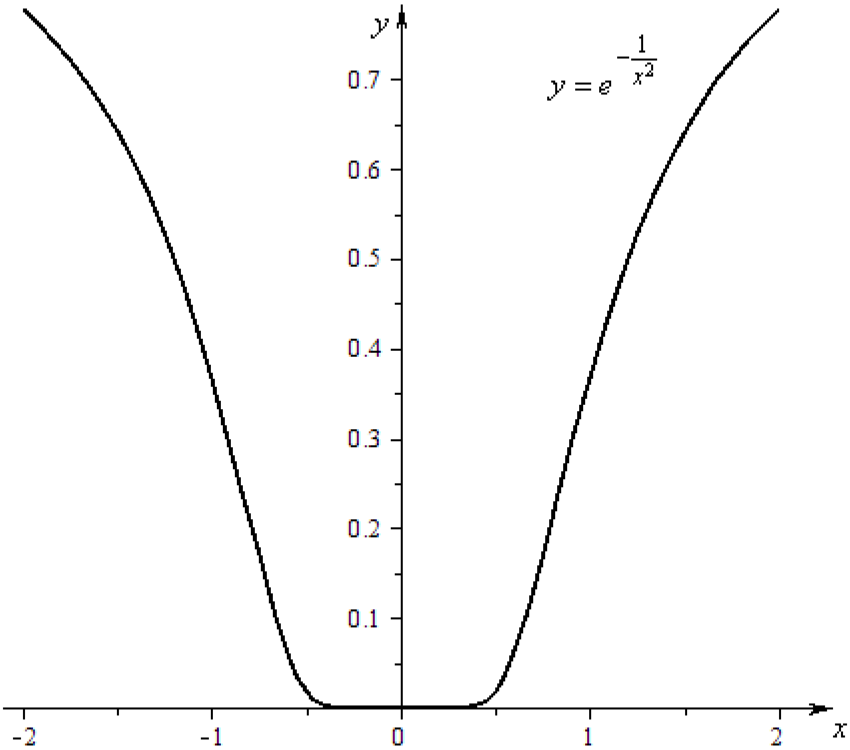

图 9.2.1

例 9.2.10 设

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

记 $P_n(u)$ 是关于 u 的 n 次多项式。容易得到，对于 $k\in\mathbf{N}^+$，当 $x\neq 0$ 时有

$$f^{(k)}(x)=P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}。$$

由定义直接计算得 $f'(0)=0$。又作归纳假设 $f^{(k-1)}(0)=0$，则

$$f^{(k)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}P_{3k-2}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0。$$

因此 f 在 $x=0$ 点的 Taylor 级数为

$$0+0x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots,$$

它在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于和函数 $S(x)=0$。显然，当 $x\neq 0$ 时，$S(x)\neq f(x)$（函数 f 的图像见图 9.2.1）。

于是，还需寻求等式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的成立条件。这还是要借助 Taylor 公式来讨论。设 f 在 $O(x_0,r)$ 上有任意阶导数，则对于每个正整数 n 成立

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),$$

其中 $r_n(x)$ 是 n 阶 Taylor 公式的余项，于是可以断言：

定理 9.2.7 设 f 在 $O(x_0,r)$ 上有任意阶导数，则在 $O(x_0,r)$ 上，等式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

成立的充分必要条件是：在 $O(x_0,r)$ 上成立

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0。$$

这时，我们称在 $O(x_0,r)$ 上 f **可以展开成幂级数**（或 **Taylor 级数**），或者称 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 是 f 在 $O(x_0,r)$ 上的**幂级数展开**（或 **Taylor 展开**）。

初等函数的 Taylor 展开

我们先导出基本初等函数的幂级数展开式，然后介绍将一般初等函数展开成幂级数的一些方法。

（1） $f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$。

证 函数 e^x 在 $x=0$ 的 Taylor 公式为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

其中 Lagrange 余项 $r_n(x)$ 为

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

由于对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立

$$|r_n(x)|\le\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以关于 e^x 的 Taylor 展开式成立。

图 9.2.2 显示了 Taylor 级数的部分和函数的逼近情况。

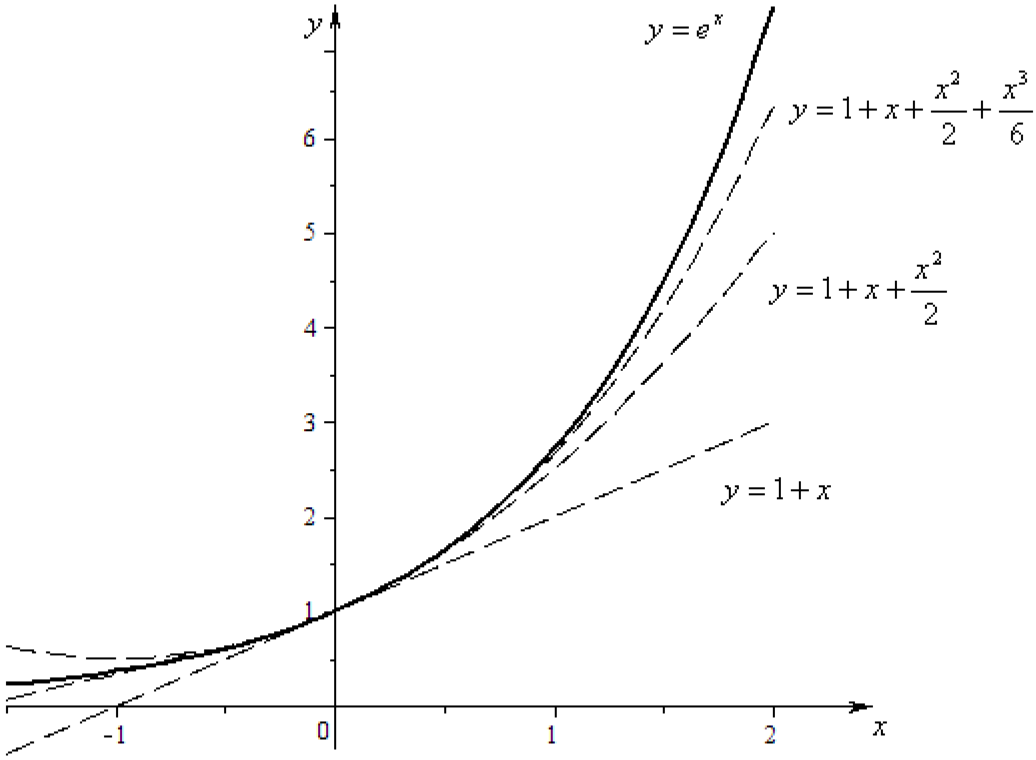

图 9.2.2

（2） $f(x)=\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

证 $\sin x$ 在 $x=0$ 的 Taylor 公式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r_{2n+2}(x),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

其中 Lagrange 余项

$$r_{2n+2}(x)=\frac{f^{(2n+3)}(\theta x)}{(2n+3)!}x^{2n+3}=\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left(\theta x+\frac{2n+3}{2}\pi\right),\quad 0<\theta<1。$$

由于对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立

$$|r_{2n+2}(x)|=\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\to 0\qquad(n\to\infty),$$

所以关于 $\sin x$ 的 Taylor 展开式成立。

图 9.2.3 显示了 Taylor 级数的部分和函数的逼近情况。

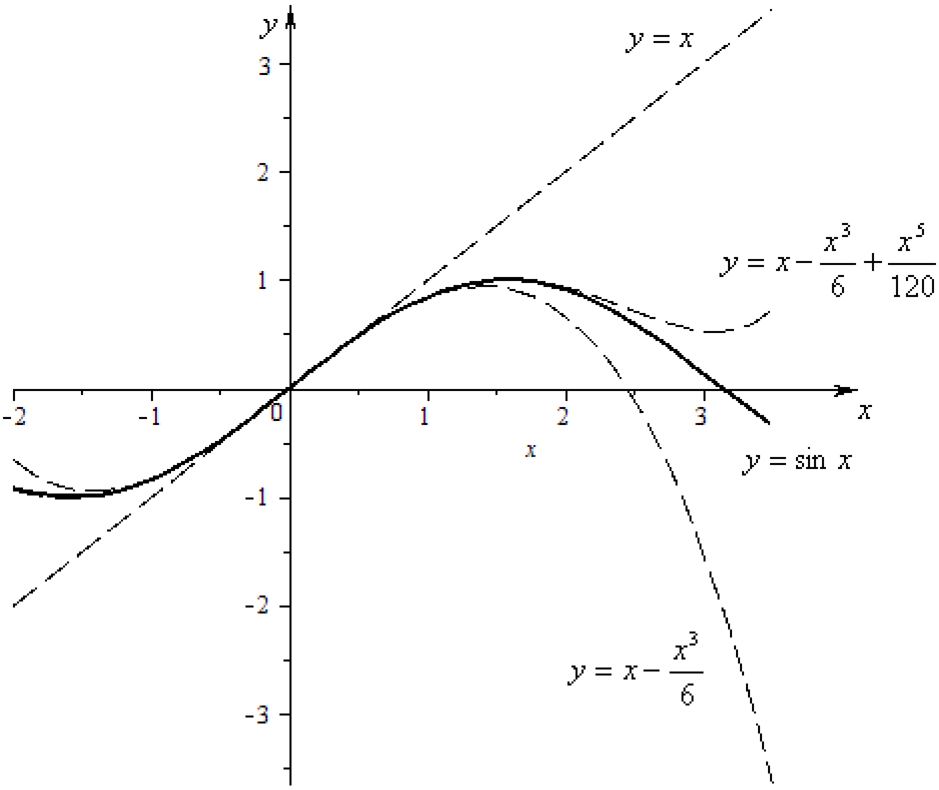

图 9.2.3

（3） $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty)。$$

这可由对 $\sin x$ 的 Taylor 展开式逐项求导得到。

（4） $\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \;, \qquad x \in [-1, 1]。$$

这是例 9.2.7 的结论。

（5） $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad x \in (-1, 1]。$$

这是例 9.2.6 的结论。

（6） $f(x) = (1+x)^{\alpha}$， $\alpha \neq 0$ 是任意实数。

当 α 是正整数 m 时。函数 f 的 Taylor 展开就是二项式展开

$$f(x) = (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \cdots + mx^{m-1} + x^m 。$$

当 α 不是正整数时，由于 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ 的各阶导数为

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \qquad k=1,2,\cdots,$$

利用记号

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ （n=1,2,\cdots）和\ \binom{\alpha}{0}=1,$$

可将 $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 级数记为 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ 。

下面来讨论这个 Taylor 级数是否收敛于 $(1+x)^\alpha$ 。

应用 D'Alembert 判别法，由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n+1}\Big/\binom{\alpha}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,$$

可知 f 在 $x=0$ 的 Taylor 级数的收敛半径为 $R=1$。

现在设 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$， $x\in(-1,1)$ 。则

$$\begin{aligned}(1+x)\ F'(x)&=(1+x)\ \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^{n-1}\\&=\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^n\\&=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n+1}(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^n\\&=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=\alpha F(x),\end{aligned}$$

因此

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{\alpha}{1+x}。$$

两边取积分

$$\int\frac{F'(x)}{F(x)}dx=\int\frac{\alpha}{1+x}dx$$

得

$$\ln F(x)=\alpha\ln(1+x)+C\quad（C\ 为常数）。$$

由于 $F(0)=1$，因此 $C=0$， 于是 $F(x)=(1+x)^\alpha$， 即

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^\alpha,\quad x\in(-1,1)。$$

通过考察 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开在区间端点的收敛情况，可归纳为

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad \begin{cases}x\in(-1,1), & 当\ \alpha\le-1,\\ x\in(-1,1], & 当\ -1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & 当\ \alpha>0。\end{cases}$$

此结论的证明从略。注意当 α 是正整数时，上式在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立。

（7） $\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]$ 。

证 由（6）可知当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots。$$

对等式两边从 0 到 x 积分，注意幂级数的逐项可积性与 $\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin x$，即得当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}。$$

事实上，上式对于每个 $x\in[-1,1]$ 都成立。而关于这个幂级数在区间端点 $x=\pm1$ 处收敛性的讨论，此处从略。

证毕

例 9.2.11 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n-1)!}x^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}$ 的和。

解 考虑

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}，$$

容易知道这个幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。在上式两边取积分，并利用逐项积分定理，便得到

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=xe^x，\quad x\in(-\infty,+\infty)\quad，$$

这里利用了 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$。再对上式两边求导得

$$S(x)=e^x(1+x)，\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n-1)!}x^n=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2}S\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{x/2}，\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

在上式中令 $x=2$ 便得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=2e。$$

下面介绍幂级数展开的其他方法。

例 9.2.12 求 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=3$ 的幂级数展开。

解 由于当 $|x-3|<3$ 时，成立

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+(x-3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}，$$

应用幂级数的逐项可导性质，对等式两边求导，得

$$-\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{(x-3)^{n-1}}{3^{n+1}}。$$

于是

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(x-3)^n}{3^{n+2}}，\quad x\in(0,6)。$$

例 9.2.13 将 $f(x)=\dfrac{1}{3+5x-2x^2}$ 展开成 Maclaurin 级数。

解　应用幂级数展开式 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{3+5x-2x^2}=\frac{1}{(3-x)(1+2x)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3-x}+\frac{2}{1+2x}\right)\\&=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}+2\cdot\frac{1}{1+2x}\right)=\frac{1}{7}\left[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n\right]\\&=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}-(-2)^{n+1}\right]x^n。\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{1}{3-x}$ 的幂级数展开的收敛范围是 $(-3,3)$，$\dfrac{2}{1+2x}$ 的幂级数展开的收敛范围是 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，因此 f 的幂级数展开在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 成立。

例 9.2.14　求 $\tan x$ 在 $x=0$ 的幂级数展开（到 x^5）。

解　由于 $\tan x$ 是奇函数，令

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\cdots,$$

于是利用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 关于 x 的幂级数展开式得到

$$(c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\cdots)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,$$

利用级数的 Cauchy 乘积公式得到，

$$c_1x+\left(-\frac{1}{2!}c_1+c_3\right)x^3+\left(\frac{c_1}{4!}-\frac{1}{2!}c_3+c_5\right)x^5+\cdots=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，便得

$$c_1=1，\quad c_3=\frac{1}{3}，\quad c_5=\frac{2}{15}。$$

因此

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots。$$

用上述方法作 Taylor 展开无法得到其幂级数的收敛范围，只能知道在 $x=0$ 的小邻域中，幂级数展开是成立的。

六．幂级数在近似计算中的应用

例 9.2.15　计算 $I=\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$，要求精确到 0.0001。

解　e^{-x^2} 的原函数不能用初等函数表示，因而不能用 Newton-Leibniz 公式来计算。但是用函数的幂级数展开可以计算它的近似值，并精确到任意事先要求的

程度。

函数 e^{-x^2} 的幂级数展开为

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

从 0 到 1 逐项积分，得

$$I=\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\cdots。$$

这是一个 Leibniz 级数，我们已经知道，在用前 k 项的和作为其近似值时，其误差不超过被舍去部分的第 1 项的绝对值。由于 $\frac{1}{75600}<1.5\times10^{-5}$，因此前面 7 项之和具有四位有效数字。于是

$$I=\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\approx1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}\approx0.7486。$$

例 9.2.16 计算 $\ln 2$，要求精确到 0.0001。

解 我们已经知道，

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

这是一个 Leibniz 级数，理论上可以用前一例的方法作近似计算，但这个级数的收敛速度太慢，若要达到所要求精度，计算量比较大。所以必须用收敛速度快的级数来代替它。

由于

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\quad x\in(-1,1]$$

及

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\cdots,\quad x\in[-1,1),$$

两式项减便得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right),\quad x\in(-1,1)。$$

将 $x=\frac{1}{3}$ 代入上式便得

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right)。$$

如果取前 4 项的和作为 $\ln 2$ 的近似值，则误差

$$|r_4|=2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$
$$<\frac{2}{3^{11}}\left[1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots\right]=\frac{1}{4\cdot3^9}<1.5\times10^{-5}。$$

因此前面 4 项之和具有四位有效数字。所以

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right) \approx 0.6931 \text{。}$$

七．习题

1．（1）、（3）； 2．（1）、（3）、（5）、（7）、（9）；3．（2）、（4）、（6）、（8）； 4．（1）；
5．（1）、（3）、（5）；6．（2）、（4）、（6）、（8）、（10）；（7）（1）、（2）； 8；11。