教　案

函数的极限

教学内容

极限理论是微积分学的基础，极限的概念与思想方法始终贯穿于微积分之中，是研究函数变化特征的一个重要工具。对于自变量的变化过程中相应函数值变化趋势的讨论，引出了函数极限的概念。由于自变量变化过程不同，函数的极限表现为不同的形式，而数列极限就是定义在正整数集上的函数当自变量趋于无穷大时的极限。在这节中主要讲解以下几方面的内容：

（1） 自变量分别趋于有限值和趋于无限时，函数的极限的概念。单侧极限的概念；

（2） 函数极限的性质，函数极限的计算；

（3） 函数极限与数列极限的关系；

（4） 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$。

教学思路和要求

（1） 极限的概念的理解是一元微分学学习中的一个难点，学生们往往对极限的严格定义以及如何利用该定义来说明问题感到无所适从，更谈不上如何去灵活运用。继数列极限之后，这部分内容还是要进一步引导学生理解极限概念的深刻含义，看清它的本质，掌握运用他们处理问题的能力；

（2） 极限的概念、极限的性质、函数极限与数列极限的关系以及两个重要极限是本节内容的重点；

（3） 要使学生理解函数极限与数列极限的关系，并能运用它说明某些函数极限不存在；

（4） 运用极限的性质，计算一些函数的极限，加深对这些性质的理解；

（5） 利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 来处理其他相关极限的技巧也是一个必须要掌握的内容。

教学安排

一．自变量趋于有限值时函数的极限

首先考虑自变量 x 趋向 x_0 的过程中函数值的变化趋势。设函数 f 在 x_0 附近有定义，如果在 x 趋于 x_0 的过程中，函数值 $f(x)$ 无限地接近于常数 A，即 $f(x)-A$ 趋于 0，就称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，它的精确数学描述如以下定义。

定义 1.3.1 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A。$$

注意，这个定义中对 x 的要求是$0<|x-x_0|<\delta$，其中$|x-x_0|>0$表示研究$x\to x_0$时 $f(x)$ 的极限与函数 f 在 $x=x_0$ 处的状况无关。因为我们关心的是 x 无限地趋于 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势，这个趋势与函数 f 在 x_0 点有无定义毫无关系。例如，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义，而 $g(x)=x+1$ 与 $f(x)$ 仅在 $x=1$ 处不相等。显然，当 $x\to 1$时函数 f 与 g 的变化趋势是相同的，它们都以 2 为极限。

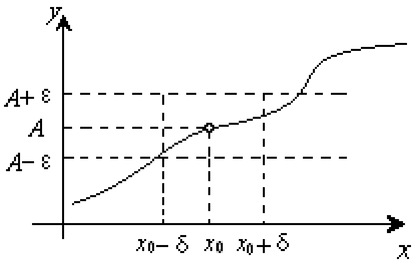

图 1.3.1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 有十分直观的几何解释：对任意给定的正数ε，作一个介于直线 $y=A+\varepsilon$ 与 $y=A-\varepsilon$ 之间的条形区域。相应于这个区域，存在以 x_0 为中心的区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，函数 f 的图象上，横坐标位于该区间但又非 x_0 的点，将落在上述条形区域中（见图 1.3.1）。

讨论与极限有关的问题时，还经常使用“邻域”的术语。设$\varepsilon>0$，称以 a 为中心的开区间（$a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 为 a 的 ε 邻域，记作 $O(a,\varepsilon)$。

这样，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 可叙述为：对 A 的任何 ε 邻域，存在 x_0 的某 δ 邻域，当 x 属于该邻域且非 x_0 时，$f(x)$ 落在 A 的 ε 邻域中，亦即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x\in O(x_0,\delta)$ 且 $x\neq x_0$ 时，$f(x)\in O(A,\varepsilon)$。

例 1.3.1 验证 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$（图 1.3.2）。

证 对于任意给定的$\varepsilon>0$，为使

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon,$$

只要取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x-0|<\delta$时，便成立

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|<\delta=\varepsilon。$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$。

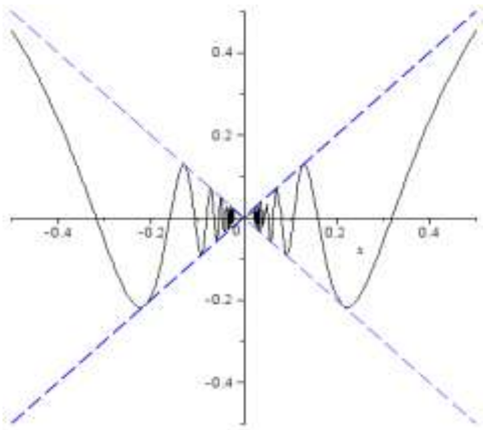

图 1.3.2

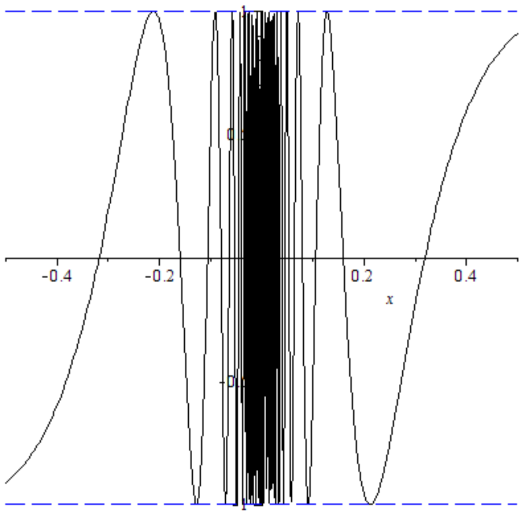

图 1.3.3

函数极限的概念也可以用数列极限的形式表述。

定理 1.3.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是对任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，其中 $x_n\neq x_0$（$n=1,2,\cdots$），均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

这个定理的证明从略。

例 1.3.2 证明 $x\to 0$ 时 $\sin\dfrac{1}{x}$ 无极限（图 1.3.2）。

证 取数列

$$x_n=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-1},\qquad y_n=(n\pi)^{-1},\quad n=1,2\cdots。$$

显然，$x_n\neq 0$，$y_n\neq 0$，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=0。$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=1，\qquad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=0。$$

由上一定理可知，如果 $x\to 0$ 时 $\sin\dfrac{1}{x}$ 存在极限，则上述两个极限应该相等，所以 $x\to 0$ 时 $\sin\dfrac{1}{x}$ 并无极限。

证毕

二．极限的性质

关于函数极限，也有类似于数列极限的四则运算法则。

定理 1.3.2 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)；$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)；$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}，$$

最后一个关系式要求 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$。

证 设 $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$B=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。由定理 1.3.1，对任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$， $x_n\neq x_0$（$n=1,2,\cdots$），均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=B$。利用数列极限的性质，得到

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)\pm g(x_n)]=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\pm\lim_{n\to\infty} g(x_n)=A\pm B。$$

再次利用定理 1.3.1，可知 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 存在，且等于 $A\pm B$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

类似地可以证得另外两式。

证毕

特别地，在定理 1.3.2 的条件下，对任意的实数 α,β，均有

$$\lim_{x\to x_0}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\lim_{x\to x_0}f(x)+\beta\lim_{x\to x_0}g(x)\text{。}$$

例 1.3.3 设有 n 次多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

求 $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)$。

注 "Σ"是求和符号。

解 由定理 1.3.2 可知

$$\lim_{x\to x_0}P_n(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{i=0}^{n}a_i x^i=\sum_{i=0}^{n}\lim_{x\to x_0}(a_i x^i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_i(\lim_{x\to x_0}x)^i=\sum_{i=0}^{n}a_i x_0^i=P_n(x_0)\text{。}$$

例 1.3.4 设 $p_n(x)$，$q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式，$q_m(x_0)\neq 0$。求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$。

解 由定理 1.3.2 和上例可知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p_n(x)}{q_m(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}p_n(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}q_m(x)}=\frac{p_n(x_0)}{q_m(x_0)}\text{。}$$

函数极限也具有重要的夹逼性质。

定理 1.3.3 设对某个 $r>0$，当 $0<|x-x_0|<r$ 时成立

$$f(x)\le g(x)\le h(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。

证 任取 $\{x_n\}$，使得 $0<|x_n-x_0|<r$，$n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，由条件及定理 1.3.1 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}h(x_n)=A$。又

$$f(x_n)\le g(x_n)\le h(x_n),$$

由定理 1.2.7 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=A$，根据 $\{x_n\}$ 的任意性，再次应用定理 1.3.1 即得 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。

证毕

例 1.3.5 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

证 作单位圆周在第一象限的一部分，如图 1.3.4 所示。设圆心角 COA 的弧度数为 x（$0<x<\dfrac{\pi}{2}$）。

显然，

△$0AC$ 的面积 < 扇形 $0AC$ 的面积 < △$0AB$ 的面积，

此即

$$\sin x<x<\tan x\text{。}$$

由此得到

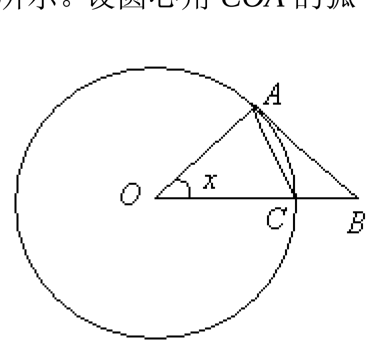

图 1.3.4

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\text{。}$$

因为 $\cos(-x) = \cos x$， $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$，所以上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立。

如能证得 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$，由上式及夹逼定理即得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$。为此，估计 $1-\cos x$，有

$$0 \le 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \le 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2,$$

由例 1.3.3 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x^2 = 0$，利用夹逼定理即得 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$，此即

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1\text{。}$$

证毕

$x \to x_0$ 时 $f(x)$的极限，反映了当 x 趋于 x_0 时函数值变化过程最终的趋势，它自然与 f 在 x_0 附近的局部形态有关。极限概念的重要性，还在于由极限可以反过来推断函数的某些局部性质。

定理 1.3.4 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 $\delta > 0$，使得 $0 <| x - x_0 |< \delta$ 时，函数 f 有界。

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则对于 $\varepsilon = 1$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 <| x - x_0 |< \delta$ 时成立 $| f(x) - A |< 1$，这就是说，当 $0 <| x - x_0 |< \delta$ 时，成立

$$A - 1 < f(x) < A + 1,$$

因此，f 在 $0 <| x - x_0 |< \delta$ 中有界。

证毕

定理 1.3.5 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，且 $A > B$，则存在 $\delta > 0$，使得 $0 <| x - x_0 |< \delta$ 时成立

$$f(x) > g(x)\text{。}$$

证 取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$，由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，故存在 $\delta_1 > 0$，使得 $0 <| x - x_0 |< \delta_1$ 时，$| f(x) - A |< \varepsilon$；又由于 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，故存在 $\delta_2 > 0$，使得 $0 <| x - x_0 |< \delta_2$ 时，$| g(x) - B |< \varepsilon$。取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，则当 $0 <| x - x_0 |< \delta$ 时，

$$f(x) > A - \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B + \varepsilon > g(x)\text{。}$$

证毕

推论 1.3.1 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > B$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 <| x - x_0 |< \delta$ 时，

$$f(x) > B\text{。}$$

只要令 $g(x) = B$，由上一定理即得。

推论 1.3.2 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，且当 $0 <| x - x_0 |< r$ 时，$f(x) \le g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)\text{。}$$

这只要利用定理 1.3.5 并使用反证法即得。

例 1. 3. 6 求极限 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$。

解 由极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

例 1. 3. 7 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$。

解 由极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)=-\frac{1+2}{1^2+1+1}=-1.$$

例 1. 3. 8 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$。

解 由极限的四则运算法则和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1\text{。}$$

例 1. 3. 9 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan x}$。

解 由例 1.3.4 与极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}\cdot\cos x$$
$$=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=5.$$

例 1. 3. 10 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解 由例 1.3.4 与极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}\text{。}$$

三. 单侧极限

函数 f 在某 x_0 两侧变化趋势不一致的情况是经常发生的。有时，f 原来就只定义于 x_0 的一侧。这就需要用单侧极限来刻划自变量从 x_0 的一侧趋于 x_0 时函数值的变化趋势。

定义 1.3.2 如果存在实数 A，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的**左极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$。

类似地可以定义 $f(x)$ 在 x_0 处的**右极限** $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$，即 $f(x_0+0)$。

关于函数的极限与左、右极限，显然存在以下关系。

定理 1.3.6 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A。$$

这就是说，极限存在等价于左、右极限同时存在且相等。

例 1.3.9 符号函数 sgn 在 $x_0=0$ 处，显然有

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn}(x)=-1，\quad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn}(x)=1。$$

即左、右极限均存在，但不相等，因此 $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ 并不存在。

关于函数的极限，还有一类重要的情况，即自变量趋于无限的情况。

四. 自变量趋于无限时的极限

定义 1.3.3 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 x 趋于无穷大时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A。$$

例如，当 $|x|$ 充分大时，$\dfrac{1}{x}$ 将与 0 充分接近，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

很多场合中，当 x 趋于正、负无穷大时，$f(x)$ 的变化趋势未必一致，这又需要借助以下概念描述。

定义 1.3.4 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使得当 $x>X$ 时成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 x 趋于正无穷大时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

类似地，可以给出 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 的定义.

关于以上几个概念，显然有类似于定理 1.3.6 的以下关系。

定理 1.3.7 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A。$$

例 1.3.11 讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在。

解 由反正切函数的性质，有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\text{。}$$

根据定理 1.3.7，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 并不存在。

对于单侧极限和自变量趋于无限时的几类极限，定理 1.3.2、定理 1.3.3、定理 1.3.4 及定理 1.3.5 的相应结论依然成立。

例 1. 3. 12 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2-6}{5x^4+3x^3+x+7}$。

解 利用极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2-6}{5x^4+3x^3+x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x^4}}{5+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{7}{x^4}}=\frac{1}{5}\text{。}$$

例 1. 3. 13 证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

证 首先证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$。对于任何正实数 x，有 $[x]\le x<[x]+1$，因此，当 $x\ge1$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}\text{。}$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=e\text{。}$$

同样地，

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=e\text{。}$$

由夹逼定理，得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\text{。}$$

其次，证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$。为此，记 $y=-x$。于是当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$，注意到

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y,$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\text{。}$$

由于 x 趋于 $\pm\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 均以 e 为极限，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\text{。}$$

证毕

注　在上例中令 $x=\frac{1}{y}$，则可得到 $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$。

例 1.3.14　求下列极限：

（1）$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$；　　　（2）$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$。

解　（1）利用 $\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$，得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-2}=e^{-2}\text{。}$$

（2）利用 $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$，得

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right]^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}\text{。}$$

例 1.3.15　放射物的放射速率与放射物的剩留量成正比。设初始时刻 $t=0$ 时，放射物质量为 M_0,试确定时刻 t 时放射物的质量 $M(t)$。

随着时间流逝，放射物质量不断减少，放射速率也逐渐变小，为便于讨论，我们把时间区间 $[0,t]$ 划分为 n 个小时段：

$$\left[0,\frac{t}{n}\right],\ \left(\frac{t}{n},\frac{2t}{n}\right],\cdots,\left(\frac{n-1}{n}t,t\right],$$

并近似地认为在每个小时段中放射物具有不变的放射速率：

$$kM_0,\ kM\left(\frac{t}{n}\right),\cdots,kM\left(\frac{n-1}{n}t\right),$$

其中 k 是比例常数。这样，

$$M\left(\frac{t}{n}\right)\approx M_0-kM_0\frac{t}{n}=M_0\left(1-\frac{kt}{n}\right)\text{。}$$

类似地，可得

$$M\left(\frac{2t}{n}\right)\approx M\left(\frac{t}{n}\right)\left(1-\frac{kt}{n}\right)\approx M_0\left(1-\frac{kt}{n}\right)^2\text{。}$$

如此类推，便得

$$M(t) \approx M_0\left(1-\frac{kt}{n}\right)^n 。$$

上式左、右两边存在误差的原因在于假设每个小时段中放射速率不变。自然设想可以增大 n 以提高精确度，从而得到

$$M(t)=\lim_{n\to\infty} M_0\left(1-\frac{kt}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty} M_0\left[\left(1+\frac{1}{\frac{-n}{kt}}\right)^{-\frac{n}{kt}}\right]^{-kt}$$

$$=M_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-n}{kt}}\right)^{-\frac{n}{kt}}\right]^{-kt}=M_0e^{-kt} 。$$

需要指出的是，本例中先取近似值，再通过极限过程求得精确解的方法，体现了微积分的一种基本思想。

注 严格地说，上述几例推导中应用了幂函数的连续性，这一点下节将会提到。

五．习　　题

1.（1)、（2），2，3.（1)、（3)、（5)、（6)，4.（2)、（4)、（6)、（8)，5，6，7.（1)、（2)、（4)。