教　案

定积分的计算

教学内容

由 Newton−Leibniz 公式知道，函数的定积分等于其原函数在积分区间两端取值之差，因而为求定积分似应先算出相应的不定积分。但定积分计算的目标毕竟并非原函数而是积分的值，所以计算不定积分时常用的分部积分及变量代换等技巧在这里可以转变为直接适用于定积分计算的相应运算法则。定积分计算是微积分中的基本技术，是学生必须掌握的技能。本节主要讲解以下几方面的内容：

（1）　定积分的分部积分法；

（2）　定积分的换元积分法；

（3）　定积分的常用计算技巧；

（4）　定积分的近似计算（数值积分法）。

教学思路和要求

（1）定积分的分部积分法和换元积分法可以从不定积分的相应思想结合 Newton−Leibniz 公式得出；

（2）定积分的计算有着许多特有的技巧，特别是在处理奇偶函数、周期函数和满足一定恒等关系的函数的定积分计算时，常有一些简便的方法，需特别指出，注意引导学生发挥主动意识，举一反三；

（3）注意在讲授数值积分时强调背景思想，并指出误差估计。

教学安排

一．分部积分法

定理 3.3.1　设函数 u，v 在 $[a, b]$ 上具有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

或

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)。$$

只要把 Newton-Leibniz 公式和不定积分的分部积分法相结合，便可得上述定积分的分部积分公式。

例 3.3.1　求由曲线 $y = x\sin x$（$0 \le x \le \pi$）和 x 轴围成的区域的面积 A。

解　由定积分的几何意义知，

$$A = \int_0^\pi x\sin x dx = -\int_0^\pi x d\cos x$$

$$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx$$

$$= \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi。$$

例 3.3.2 计算 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$，其中 n 为非负整数。

解 显然，

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 xdx=\frac{\pi}{2},$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1。$$

而对 $n\ge 2$，有

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin xdx\\&=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx\\&=(n-1)(I_{n-2}-I_n)。\end{aligned}$$

由此，可得递推关系

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\qquad n\ge 2。$$

结合 I_0 和 I_1 的结果，可得 $n\ge 2$ 时，

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\\[2ex]\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

二．换元积分法

从不定积分的换元法转换到定积分的换元法，要特别注意积分上、下限的对应关系。

定理 3.3.2 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，φ 是定义于 α 和 β 间的具有连续导数的函数，其值域包含于 $[a,b]$，且 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$。则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt。$$

证 因为函数 f 连续，故存在原函数，设 $F'=f$，于是

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

即 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数。由 Newton−Leibniz 公式，可得

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

和

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)。$$

所以上述两个积分相等。

例 3.3.3 求半径为 r 的圆的面积。

解 设圆的中心在原点。由对称性，只须求出它在第一象限部分的面积。圆周在第一象限部分的方程为

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\text{，}\quad 0\le x\le r\text{。}$$

因此，相应的面积为$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$。

为计算这个积分，作变量代换$x=r\sin t$，$t\in[0,\pi/2]$，于是，$dx=r\cos tdt$。变量x对应的积分区间$[0,1]$转换为变量t对应的积分区间$[0,\pi/2]$，且$t=0$时，$x=0$；$t=\dfrac{\pi}{2}$时$x=r$。这样

$$\begin{aligned}\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx&=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt\\&=r^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi r^2\text{。}\end{aligned}$$

所以，整个圆的面积$A=\pi r^2$。

例 3.3.4 计算$\int_1^2\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}dx$。

解 令$t=\sqrt{x-1}$，于是$x=t^2+1$，$dx=2tdt$，且$x=1$时$t=0$；$x=2$时，$t=1$。于是

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx&=\int_0^1\frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt\\&=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\text{。}\end{aligned}$$

例 3.3.5 计算$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx,$其中$n$是非负整数。

解 作变量代换$x=\dfrac{\pi}{2}-t$，于是

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt\text{。}$$

右端积分的值见例 3.3.2。

要补充说明的是，如果在计算中使用的是凑微分的不定积分换元法，因为运算过程往往不另行写出中间变量，从而也毋须引入中间变量的变化区间。这就是说：如果$\int f(u)du=F(u)+c$，函数g在$[a,b]$上连续可微，则

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx=F[g(x)]\Big|_a^b\text{。}$$

例 3.3.6 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx$。

解
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xd\cos x\\&=-\frac{1}{6}\cos^6 x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}\text{。}\end{aligned}$$

易知上面的运算实际上是通过变换$u=\cos x$把原积分化为$-u^5$的积分。如果在这里把关于x的积分改写关于u的积分，那么必须注意：原来$\sin^5 x\cos x$关于x在$[0,\pi/2]$上的积分换元后相应的是$-u^5$关于u从 1 到 0 的积分，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_1^0 u^5 du = \frac{1}{6}。$$

例 3.3.7 计算 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$。

解一 作变量代换 $x = \sec t$，则 $dx = \sec t \tan t dt$，且当 $x = -2$ 时，$t = \frac{2}{3}\pi$；当 $x = -\sqrt{2}$ 时，$t = \frac{3}{4}\pi$，于是

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sec t \tan t}{\sec t(-\tan t)} dt = -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} dt = -\frac{\pi}{12}。$$

这个积分也可以用凑微分的方法计算。

解二

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \arcsin \frac{1}{x}\bigg|_{-2}^{-\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{12}。$$

例 3.3.8 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$。

解 作变量代换 $u = \sqrt{1-e^{-2x}}$，即 $x = -\frac{1}{2}\ln(1-u^2)$，则 $dx = \frac{u}{1-u^2} du$，且当 $x = 0$ 时，$u = 0$；当 $x = \ln 2$ 时，$u = \frac{\sqrt{3}}{2}$，于是

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u \cdot \frac{u}{1-u^2} du = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-u^2} - 1\right) du$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - u\right)\bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

下面例 3.3.9 和例 3.3.11 的几何意义是明显的，它们往往可以用来简化积分的计算。

例 3.3.9 设 $a > 0$，f 是 $[-a, a]$ 上的连续函数，则

（1）当 f 是奇函数时，

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0；$$

（2）当 f 是偶函数时

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx。$$

证 设 f 是奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，$x \in [-a, a]$。于是

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = \int_{-a}^{0} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx。$$

对上式右端第一个积分作换元 $x = -t$，则有

$$\int_{-a}^{0} f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_0^a f(t) dt，$$

所以$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$。类似地可以讨论偶函数的情况。

证毕

例 3.3.10 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(x^2\cos^6 2x + 2\sin x)dx$。

解 由于$x^2\cos^6 2x\sin x$是奇函数，$\sin^2 x$是偶函数，因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^6 2x\sin x dx = 0, \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx。$$

于是

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(x^2\cos^6 2x\sin 2x + 2\sin^2 x)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx = 2\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

例 3.3.9 的结论实际上蕴含于以下更一般的结论中：对于$[-a, a]$上任何连续函数f，总有

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx。$$

利用这个关系式，有时也可简化积分计算。

例 3.3.11 计算$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx$。

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1+\sin(-x)}\right]dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin^2 x} dx = 2\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2。$$

例 3.3.12 设f是以T为周期的连续函数，证明：对任何实数a，成立着

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx。$$

证 显然

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx。$$

对最后一个积分作换元$x = t + T$，得

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt。$$

因此

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(t)dt$$

$$= \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx。$$

证毕

例 3.3.13 计算$I = \int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$。

解 先计算不定积分。当$x > 0$或$x < 0$时，有

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+c\text{。}$$

至此，如果不假思索地应用 Newton−Leibniz 公式，便得

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\Bigg|_{-1}^{1}=0\text{。}$$

结果显然是错误的。因为在$[-1,1]$上恒取正值的连续函数的积分不可能为 0，正确的计算如下：

由于被积函数是偶函数，由例 3.3.9 可知其积分值为$[0,1]$上积分值的 2 倍，所以

$$I=2\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

这里 $\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\Bigg|_{x=0}$ 是指 $\lim\limits_{x\to 0+0}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}=-\frac{\pi}{2}$。这一解法的依据是因为 $\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$ 是$(0,1)$上的连续函数，且$x\to 0+0$时极限存在，以此极限值作为 0 点函数值的补充定义，就得到$[0,1]$上的连续函数，自然可以应用 Newton−Leibniz 公式。前一解法错误的原因在于$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$在$x=0$点间断，所以并非被积函数在$[-1,1]$上的原函数。如果读者仍然希望在$[-1,1]$上用 Newton−Leibniz 公式的话，可以选用下面的原函数计算：

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}, & x\in[-1,0),\\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=0,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\pi\right), & x\in(0,1].\end{cases}$$

三．数值积分

Newton−Leibniz 公式远不足以解决定积分的计算问题。一方面，许多可积函数的原函数难以或者根本不能用初等函数表示；另一方面，大量的实际问题还需要对并无解析表达式的函数计算定积分。各种数值积分方法提供了根据被积函数在积分区间某些点上的函数值近似计算其积分值的途径。迅速发展的计算机技术则为扩大数值积分的应用范围并提高其精确度创造了条件。

我们知道定积分的几何意义是面积的计算。各类数值积分方法实际上就源于对面积作近似计算的直观思考。

一. 梯形公式

为了直观地导出计算$\int_a^b f(x)dx$的近似公式，不妨先假设 f 是非负函数，实际上其结论适用于任意值的可积函数。

把$[a,b]$等分为n个小区间，即在$[a, b]$间插入分点（图 3.3.1）

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \cdots, n。$$

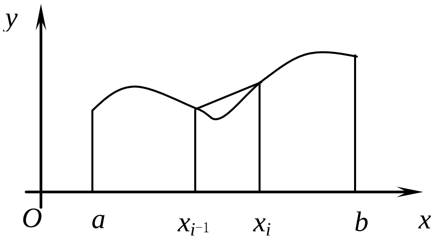

图 3.3.1

显然，每个小区间的长度为$\dfrac{b-a}{n}$。设$y = f(x)$对应于每个分点的函数值分别为

$$y_0, y_1, \cdots, y_n。$$

以直线 $x = x_i$（$i = 1, 2, \cdots, n-1$）把由直线 $x = a$，$x = b$，x轴及$y = f(x)$围成的曲边形分割为n个小曲边形。在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上，用连结(x_{i-1}, y_{i-1})和(x_i, y_i)的直线段代替曲线段$y = f(x)$（$x_{i-1} \le x \le x_i$），以小梯形面积作为原小曲边形面积的近似，即

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n}(y_{i-1} + y_i),$$

于是，

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{2n}(y_{i-1} + y_i)。$$

整理后即得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0}{2} + (y_1 + \cdots + y_{n-1}) + \frac{y_n}{2}\right]。$$

这就是近似计算定积分值的**梯形公式**。若 f'' 在$[a, b]$上连续，$M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$，则以上近似公式的误差$E_n$有如下估计（证明从略）：

$$|E_n| \le \frac{M(b-a)}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2。$$

二. 抛物线公式（Simpson 公式）

在梯形公式中，对应于每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$，替代曲边形顶部的曲线段是直线段，即以一次函数替代$y = f(x)$。由此设想，如果以二次函数代替$y = f(x)$，即以抛物线段替代曲线段，将能提高积分近似值的精确度。

为此，在$[a,b]$中插入分点

$$x_i = a + i\frac{b-a}{2n}, \qquad i = 0,1,2,\cdots 2n。$$

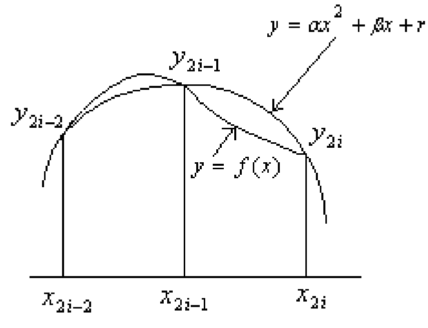

图 3.3.2

得到n个小区间$[x_{2i-2}, x_{2i}]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$。在每个小区间$[x_{2i-2}, x_{2i}]$上，找一个在x_{2i-2}，x_{2i-1}，x_{2i}处取值与 f 相同的二次函数（图 3.3.2），设为

$$g_i(x) = \alpha x^2 + \beta x + r, \qquad x \in [x_{2i-2}, x_{2i}]。$$

以抛物线$y = g_i(x)$代替$y = f(x)$，得到

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} g_i(x)dx。$$

以$i=1$为例计算右端积分，得

$$\int_{x_0}^{x_2} g_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} (\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx$$
$$=\frac{\alpha}{3}(x_2^3-x_0^3)+\frac{\beta}{2}(x_2^2-x_0^2)+\gamma(x_2-x_0)$$
$$=\frac{x_2-x_0}{6}[(\alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma)+(\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma)+\alpha(x_2+x_0)^2+2\beta(x_2+x_0)+4\gamma]。$$

注意到$x_2+x_0=2x_1$，$y_i=\alpha x_i^2+\beta y_i+\gamma$，$x_2-x_0=\frac{b-a}{n}$，所以

$$\int_{x_0}^{x_2} g_1(x)dx = \frac{b-a}{6n}(y_0+4y_1+y_2)。$$

一般地，有

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} g_i(x)dx = \frac{b-a}{6n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})\quad，\quad i=1,2,\cdots,n。$$

将以上诸式两端分别相加，并注意左边的和近似等于$\int_a^b f(x)dx$，所以

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right)。$$

这就是近似计算定积分值的**抛物线公式**（或 **Simpson 公式**）。若$f^{(4)}$在$[a,b]$上连续，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$，则以上近似公式的误差$E_n$有如下估计（证明从略）：

$$|E_n|\le \frac{M(b-a)}{180}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^4。$$

例 3. 3. 14 用数值积分方法计算$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$。

解 首先，在$[0,1]$中取三个分点$x_0=0$，$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=1$由计算得到

$y_0=1,\quad y_1=\frac{4}{5},\quad y_2=\frac{1}{2}$。

由梯形公式得

$$I\approx \frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+\frac{y_2}{2}\right)=0.775。$$

由抛物线公式得

$$I\approx \frac{1}{6}(y_0+4y_1+y_2)=0.783333。$$

其次，在$[0,1]$中取五个分点$x_0=0$，$x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=\frac{3}{4}$，$x_4=1$由计算得

$$y_0=1,\quad y_1=\frac{16}{17},\quad y_2=\frac{4}{5},\quad y_3=\frac{16}{25},\quad y_4=\frac{1}{2}。$$

由梯形公式得

$$I \approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right) = 0.782794 \text{ 。}$$

由抛物线公式得

$$I \approx \frac{1}{6 \cdot 2}[y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] = 0.785392 \text{ 。}$$

由于

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(2)} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

它的绝对值在$[0,1]$上的最大值为 2。于是用梯形公式近似计算产生的误差不超过 $\frac{2}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2 < 1.042\times 10^{-2}$ 。

由于

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(4)} = \frac{24(5x^4-10^2+1)}{(1+x^2)^5},$$

它的绝对值在$[0,1]$上的最大值为 24。于是用抛物线公式近似计算产生的误差不超过$\frac{24}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 < 5.21\times 10^{-4}$。可见，用抛物线公式的确已达到了相当高的精确度。

实际上，由 Newton−Leibniz 公式，可得

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7853981635 \text{ 。}$$

四．习　题

1．（1）、（3）、（5）、（7）；2．（2）、（4）、（6）、（8）；3．（1）、（2）、（3）、（5）；4；6；7；9；11；14；15；17。