教　案

全微分与偏导数

教学内容

全微分与偏导数的概念是整个多元函数微分学的出发点。学好这两个基本概念才能深入认识多元函数微分方法的实质。本节中主要讲解以下几方面的内容：

（1）　全微分与偏导数的概念；

（2）　偏导数与全微分的计算；

（3）　空间曲面的切平面，偏导数与全微分的几何意义。

教学思路和要求

（1）　准确掌握全微分与偏导数概念的内涵，是深刻理解多元函数微分学的关键，应使学生认识到它们不只是一元函数相应概念的形式推广，从而学到多元情况下“局部线性化”的方法。

（2）　学生掌握偏导数与全微分的计算并不困难，教师应通过实例指出偏导数与一元函数导数（微商）的区别，并介绍偏导数计算的若干技巧。

（3）　用全微分作近似计算是微分应用的基础，这个内容所占篇幅不多，但不应忽视。

（4）　利用曲面的切平面使学生对偏导数与全微分留下直观的印象。

（5）　在本节教学中，教师可将数学分析的思想，线性代数的方法和解析几何的工具有机地结合起来，以小见大，从整体上显示数学理论的意义与作用。

教学安排

一．全微分的引入

对于n元函数f，当自变量$x=(x_1,\cdots,x_n)$有改变量$\Delta x=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$时，因变量$u$有相应的改变量$\Delta u$，我们希望进一步寻找$\Delta u$与$\Delta x$间的数量关系。受一元函数可微性的启示，首先要问：是否在适当的条件下，可以把Δu分解为两部分，一部分关于Δx是线性的，一部分当$\|\Delta x\|$趋于 0 时，关于$\|\Delta x\|$是高阶无穷小？

例 1　设S是边长分别为x和y的矩形面积，则

$$s=xy。$$

如果边长x和y分别有增量Δx和Δy，那末面积S相应地有一个增量ΔS:

$$\begin{aligned}\Delta S&=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy\\&=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

可见ΔS的表达式中包含两部分，第一部分$y\Delta x+x\Delta y$是$(\Delta x,\Delta y)$的线性函数，第二部分$\Delta x\Delta y$是比$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$高阶的无穷小量。这样，在允许略去高阶无穷小的情况下，可以用$y\Delta x+x\Delta y$近似替代ΔS.

定义 1　设n元函数$u=f(x)$在$x_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$的某邻域中有定义，如果有一个关于$\Delta x=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$的线性函数$k$，使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=k(\Delta x)+o(\|\Delta x\|),$$

则称函数f在x_0**处可微**，并称$k(\Delta x)$为f在x_0处的**全微分**，记作du，即

$$du=k(\Delta x).$$

二．全微分概念的分析，偏导数的概念的引入

1．由上一节关于线性函数一般形式的讨论可知：对于线性函数k，必存在$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，使得

$$k(\Delta x)=a\cdot\Delta x=a_1\Delta x_1+\cdots+a_n\Delta x_n,$$

从而，$du=a_1\Delta x_1+\cdots+a_n\Delta x_n.$

特别地，如果取

$$u=g(x)=x_i,\qquad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,$$

则有

$$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)=\Delta x_i,$$

因而$dx_i=du=\Delta x_i$。这就是说，在多元情况下，自变量每一分量的增量即该分量的微分。回到原来的函数$u=f(x)$，即得

$$du=a_1dx_1+\cdots+a_ndx_n.$$

2．这样，当函数$u=f(x)$在x_0处可微时，有$(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，使

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}a_i\Delta x_i+o(\|\Delta x\|).$$

为了求出a_1，应在上式中把a_1“分离”出来，不妨取$\Delta x=(\Delta x_1,0,\cdots,0)$，这时，$\Delta u$的表达式就是

$$f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=a_1\Delta x_1+o(|\Delta x_1|).$$

可见

$$a_1=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{1}{\Delta x_1}[f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)].$$

这就是说，如果把n个变元中$n-1$个变元$x_2,\cdots,x_n$固定下来，得到一个以x_1为自变量的一元函数，这个一元函数的导数就是要寻找的a_1。类似地，如果将n个变元中除x_i外其余$n-1$个变元固定下来，把f作为x_i的一元函数，其导数即a_i。由此，我们引入以下定义。

定义 2 设n元函数$u=f(x)$在$x_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{1}{\Delta x_1}[f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)]$$

存在，则称此极限为函数f在x_0处对于x_1的**偏导数**，记作$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_0}$，或$f'_{x_1}(x_0)$，$u'_{x_1}(x_0)$.

类似地，可以定义$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x_0},i=2,\cdots,n.$

如果多元函数$u=f(x_1,\cdots,x_n)$在某区域D上每一点处均存在偏导数$\frac{\partial u}{\partial x_i}$，则$\frac{\partial u}{\partial x_i}$也是区域$D$上的一个函数，称为$u$的一个**偏导函数**，常简称为偏导数。

3．由前面的讨论得

定理 1 若n元函数$u=f(x)$在x处可微，则它在该点处关于诸x_i的偏导数均存在，而且

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

值得注意的是：与一元函数不同，对多元函数而言，在某点处诸偏导数的存在性并不能保证它在该点处的可微性。事实上，诸偏导数的存在甚至不能保证函数在该点连续。

三．连续性、可微性及偏导数存在性的讨论

定理 2 设 n 元函数 $u=f(x)$ 在 $x_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处可微，则 f 在点 x_0 处连续。

证 由 $u=f(x)$ 在 x_0 处可微，所以有 $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，使得

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}a_i\Delta x_i+o(\|\Delta x\|),$$

因而当 $\|\Delta x\|=(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2)^{\frac{1}{2}}\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，即 f 在 x_0 处连续。

当多元函数 f 在区域 D 上每一点处均可微时，称 f 在 D 上可微。由上面的定理可知，D 上的可微函数在 D 上连续。

例 2 二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

由前面的讨论，已经知道此函数在（0，0）处的极限不存在，从而不连续；但是，这个函数在 x 轴上恒等于 0，在 y 轴上也恒等于 0，从而在（0，0）处两个偏导数均存在，且 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0.$

在上例中，二元函数在原点处偏导数存在，只反映了函数在原点处沿 x 轴和沿 y 轴方向上的变化特征。它可以保证函数在原点处沿 x 轴和沿 y 轴方向是连续变化的，但是，正如上一节指出的，这并不意味着它沿二维空间任何方向上是连续变化的。

定理 3 设函数 $u=f(x_1,\cdots,x_n)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 在点 x_0 连续，则函数 f 在点 x_0 处可微，而且

$$du=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i.$$

为叙述方便，我们仅就 $n=2$ 的情况写出证明，即设函数 $u=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x,y) 连续，证明 f 在该点处可微，而且 $du=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$。

证 （参见课本）。

四．偏导数与全微分的计算

由定义可知，偏导数的计算与一元函数求导的方法完全相同。只须把 n 个自变量中与该偏导数对应的某一个作为变量，其余 $n-1$ 个均视作常量，即把固定了 $n-1$ 个变元的 n 元函数视为一元函数，采用一元函数求导即可。

多元函数求偏导数的运算也遵循类似于一元函数求导的四则运算法则。

例 3 在热力学中，已知压强 P，体积 V 和温度 T 之间满足理想气体的状态方程：$PV=kT$，其中 k 是常数。证明:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证　由 $P=k\frac{T}{V}$, 得 $\frac{\partial P}{\partial V}=-k\frac{T}{V^2}$；由 $V=k\frac{T}{P}$, 得 $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{k}{P}$; 由 $T=\frac{1}{k}PV$，得

$$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{1}{k}V.$$

因此，

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{kT}{V^2}\cdot\frac{k}{P}\cdot\frac{V}{k}=-\frac{kT}{PV}=-1.$$

例 4 设 $f(x,y)=x^3+(y^2-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f'_x(x,1)$， $f'_y(x,1)$。

解 由于 $f(x,1)=x^3$，所以

$$f'_x(x,1)=3x^2。$$

由于 $f'_y(x,y)=2y\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}+(y^2-1)\left(\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}\right)'_y$，所以

$$f'_y(x,1)=2\arctan\sqrt{x}。$$

例 5　设 $z=xe^{xy}+y$，求在点 $(x,y)=(1,1)$ 处的全微分。

解　$dz=z_x dx+z_y dy=e^{xy}(1+xy)dx+(x^2e^{xy}+1)dy,$

因此，

$$dz|_{(1,1)}=2edx+(e+1)dy.$$

五．全微分用于近似计算

设 $u=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则由 $\Delta u=du+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ 可得

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)&\approx f(x_0,y_0)+du\\&=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.\end{aligned}$$

这就是全微分用于近似计算的关系式

例 6　求（1.04）$^{2.02}$ 的近似值。

解　考察二元函数 $f(x,y)=x^y$. 取

$$x_0=1,\quad y_0=2,\quad \Delta x=0.04,\quad \Delta y=0.02.$$

由计算， $f_x(x,y)=yx^{y-1}$，　$f_y(x,y)=x^y\ln x$，于是

$$f(1,2)=1,\quad f_x(1,2)=2,\quad f_y(1,2)=0.$$

所以

$$\begin{aligned}(1.04)^{2.02}&=f(1.04,2.02)\approx f(1,2)+f'_x(1,2)\Delta x+f'_y(1,2)\Delta y\\&=1+2\cdot(0.04)+0\cdot(0.02)=1.08.\end{aligned}$$

六．空间曲面的切平面，偏导数的几何意义

二元函数的偏导数也可作出类似于一元函数导数的几何解释：函数 $z=f(x,y)$ 的图象是 $\mathbf{R}^3$ 中一个曲面 S，该曲面被平面 $y=y_0$ 所截，得一曲线：

$$C_1:\begin{cases} z=f(x,y_0), \\ y=y_0. \end{cases}$$

这条曲线在点$P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线PT_1的斜率，即它与x轴正方向夹角的正切就是$f_x'(x_0,y_0)$，同样地，$f_y'(x_0,y_0)$即截线

$$C_2:\begin{cases} z=f(x_0,y), \\ x=x_0 \end{cases}$$

在点P处切线PT_2的斜率（图 7.2.1）。

我们把曲面S在点P处的**切平面**定义为切线PT_1和PT_2所在的平面。由于该平面的法向量与PT_1, PT_2垂直，故可取为

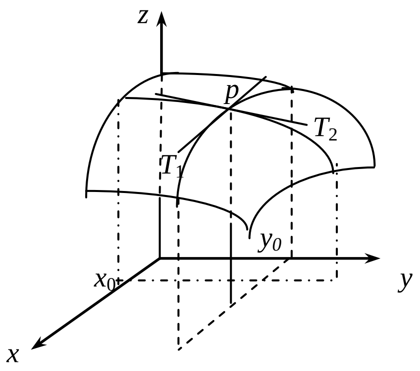

图 7.2.1

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f_x'(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y'(x_0,y_0) \end{vmatrix}=-f_x'(x_0,y_0)\boldsymbol{i}-f_y'(x_0,y_0)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\,.$$

从而切平面方程为

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-f(x_0,y_0))=0.$$

利用切平面还可作出全微分的几何解释：dz即自变量从(x_0,y_0)变到(x,y)时切平面上相应点高度的改变，而Δz表示曲面上相应点高度的改变。

例 7　求椭圆抛物面$z=2x^2+y^2$在点（1，1，3）处的切平面方程。

解　设$f(x,y)=2x^2+y^2$,则

$$f_x'(1,1)=4x\big|_{(1,1)}=4,\qquad f_y'(1,1)=2y\big|_{(1,1)}=2.$$

从而可得由面在（1，1，3）处的切平面方程为

$$4(x-1)+2(y-1)-(z-3)=0,$$

即$4x+2y-z=3.$

七．进一步的问题

作为本节讨论的继续，下一节将讨论：

1．高阶偏导数的概念，性质及计算；

2．从$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^n$的映射的可微性，更一般的导数概念。

八．习　　题

1．（3），（4）

2．（3），（4）

3．（1），（3），（5）

5．（2）

6．（1），（2）