教 案

Green 公式和 Stokes 公式

教学内容

Green 公式、Stokes 公式和 Gauss 公式都反映了某“区域”上的积分与其边界上的积分之间关系。无论是结论的形式，抑或推导的过程，它们与 Newton-Leibniz 公式是一脉相承的，而且最终可以表成统一的形式；同时，它们也和 Newton-Leibniz 公式一样，在各类理论或实际问题中有着广泛的应用。本节介绍 Green 公式 Stokes 公式，具体内容如下：

（1） Green 公式及其证明；

（2） Stokes 公式及其证明；

（3） 利用 Green 公式和 Stokes 公式计算曲线积分。

教学思路和要求

（1）首先介绍区域或曲面边界的诱导定向的概念，进而引出 Green 公式和 Stokes 公式，这是课程的重点；

（2）对简单形式的区域证明 Green 公式和；

（3）对简单形式的有向曲面证明 Stokes 公式；

（4）讲解利用 Green 公式和 Stokes 公式计算曲线积分的方法，这也是课程的重点。

教学安排

一．Green 公式

先介绍单连通区域的概念。设 D 为一平面区域。如果 D 内任何一条闭曲线都可以在不触及边界的过程中连续地收缩成一点，就称 D 为**单连通区域**；否则，称为**复连通区域**。通俗地说，单连通区域就是不含有“洞”的区域，复连通区域中含有“洞”。例如，单位圆盘 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 是单连通的，而圆环 $\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ 是复连通的。

对于平面区域 D，其边界 ∂D 的**正向**规定如下：当观察者沿 ∂D 的这个方向行进时，区域 D 在他近旁的部分总是处于他的左侧。例如，对于圆环 $D=\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$，∂D 的一部分：$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=2\}$ 的正向是逆时针方向；另一部分：$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 的正向则是顺时针方向。

定理 8.8.1（**Green 公式**） *设平面有界闭区域 D 的边界由有限段光滑的曲线构成，二元函数 P，Q 在 D 上具有连续一阶偏导数，则有*

$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中 ∂D 取正向。

证 先讨论单连通区域的情况。如果区域 D 同时可以表示为以下两种形式：

$$D=\{(x,y)\,|\,y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$$

$$=\{(x,y)\mid x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\},$$

则称这类区域为“标准区域”（见图 8.8.1）。

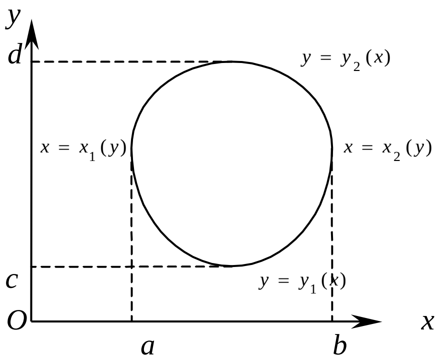


图 8.8.1

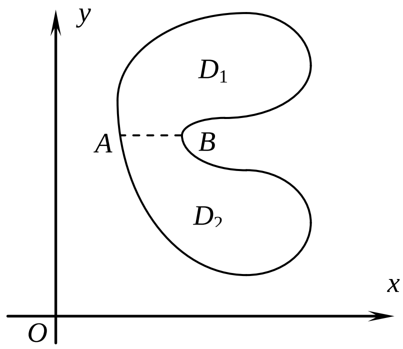


图 8.8.2

此时，由计算可得

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$=\int_a^b[P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))]dx$$

$$=-\int_a^b P(x,y_1(x))dx-\int_b^a P(x,y_2(x))dx=-\oint_{\partial D}P(x,y)dx。$$

同理可得

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx$$

$$=\int_c^d[Q(x_2(y),y)-Q(x_1(y),y)]dy$$

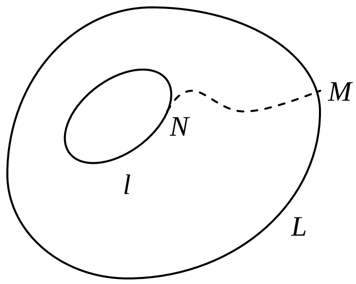
$$=\int_c^d Q(x_2(y),y)dy+\int_d^c Q(x_1(y),y)dy=\oint_{\partial D}Q(x,y)dy。$$

两式合并就得到所需求的结果。

一般地，可以把由分段光滑曲线围成的单连通区域分割为有限个“标准区域”的并。例如，图 8.8.2 所示的区域可由光滑曲线 AB 将 D 分割成“标准区域” D_1 与 D_2 的并。由对“标准区域”证得的 Green 公式得到

$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial D_1}Pdx+Qdy,$$

$$\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial D_2}Pdx+Qdy。$$



注意 D_1 与 D_2 的公共边界 AB 的方向：作为 ∂D_1 的一部分是从 A 到 B，作为 ∂D_2 的一部分是从 B 到 A，两个方向恰好相反。将上面两式的两端分别相加，便得

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial D}Pdx+Qdy。$$

图 8.8.3

当 D 须分为更多个“标准区域”的情况可以类似证得，不再赘述。

再设 D 是有有限个洞的复连通区域，例如，图 8.8.3 所示的区域。以光滑曲

线连结其外边界L上的点M和内边界l上的点N，它把D割成一个单连通区域。沿其边界的正向作积分，利用单连通区域的 Green 公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\left(\int_L+\int_{MN}+\int_l+\int_{NM}\right)Pdx+Qdy$$

$$=\left(\int_L+\int_l\right)Pdx+Qdy=\oint_{\partial D}Pdx+Qdy\text{。}$$

当D中有更多个“洞”的情况也可类似证得，不再赘述。

证毕

Green 公式的一个直接应用，是可以由它导出用曲线积分计算平面区域面积的关系式。

推论 8.8.1 设D为一有界平面区域，其边界为分段光滑的闭曲线，则D的面积为

$$A=\oint_{\partial D}xdy=-\oint_{\partial D}ydx=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}xdy-ydx,$$

其中∂D取正向。

例 8.8.1 计算椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）所围区域的面积。

解 椭圆L：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta,\end{cases}\qquad 0\le\theta<2\pi,$$

设其定向取逆时针方向。于是，

$$A=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi ab\text{。}$$

例 8.8.2 计算曲线积分

$$\oint_L(4y-\sqrt{x^3+x+1})dx+(8x-e^{\cos y})dy,$$

其中L是圆周$x^2+y^2=4$，定向取逆时针方向。

解 由 Green 公式

$$\oint_L(4y-\sqrt{x^3+x+1})dx+(8x-e^{\cos y})dy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\left[\frac{\partial(8x-e^{\cos y})}{\partial x}-\frac{\partial(4y-\sqrt{x^3+x+1})}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}(8-4)dxdy=16\pi\text{。}$$

例 8.8.3 计算$\iint_D e^{-y^2}dxdy$，其中D是以$O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(0,1)$为顶点的三角形区域（图 8.8.4）。

解 令$P=0$，$Q=xe^{-y^2}$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}\text{。}$$

取∂D的定向逆时针方向，则由 Green 公式得

$$\iint_D e^{-y^2}dxdy=\int_{\partial D}xe^{-y^2}dy$$

$$=\int_{OA}xe^{-y^2}dy=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\text{。}$$

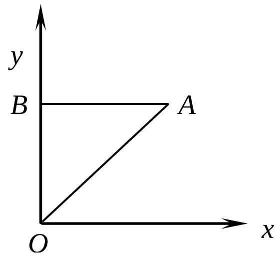


图 8.8.4

例 8.8.4 计算第二类曲线积分

$$\int_L (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy\text{，}$$

其中L为圆$(x-a)^2+y^2=a^2$（$a>0$）的上半圆周部分，方向为从点$A(2a,0)$，到原点$O(0,0)$（图 8.8.5）。

解 为了使用 Green 公式以简化运算，作自O至A的有向线段$\overline{OA}$，把L与$\overline{OA}$合并就得一条定向为逆时针方向的有向闭曲线，记其所围区域为D。利用 Green 公式可得

$$\left(\int_L+\int_{\overline{OA}}\right)(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-m)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-my)\right]dxdy$$

$$=m\iint_D dxdy=\frac{m\pi a^2}{2}\text{。}$$

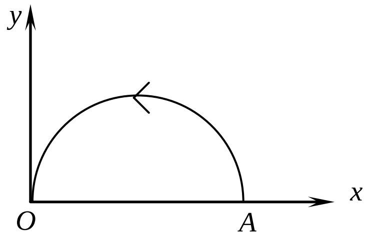


图 8.8.5

再计算沿$\overline{OA}$的曲线积分，因为$\overline{OA}$的方程为$y=0$，$x:0\to 2a$，所以

$$\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\int_0^{2a}0dx+0=0\text{。}$$

代入前面的式子即得

$$\int_L (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{m\pi a^2}{2}\text{。}$$

例 8.8.5 计算曲线积分$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$为一条分段光滑，且不经过原点的简单闭曲线（即不自交的闭曲线），方向为正向。

解 记$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$。当$x^2+y^2\neq 0$时，P，Q及其一阶偏导数均连续，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}\text{。}$$

当L所围的区域D不包含原点时，由 Green 公式知，$I=0$。

当L所围的区域D包含原点时，取适当小的$r>0$，使圆周l：$x^2+y^2=r^2$位于D内，以逆时针方向作为l的正向。于是，由L和l所围的复连通区域D_1不包含原点。D_1的边界是有向闭曲线$L\cup l^-$，其中l^-与l方向相反。由 Green 公式，

$$\left(\int_L+\int_{l^-}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0,$$

即

$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\oint_{l^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}。$$

因为l的参数方程为$x=r\cos t$， $y=r\sin t$，所以

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}&=\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{r\cos t\cdot r\cos t-r\sin t(-r\sin t)}{r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t}dt\\&=\int_0^{2\pi}dt=2\pi。\end{aligned}$$

在这个例子中利用 Green 公式来改变积分路径的方法，在下一节还将加以讨论。

Green 公式可以看作 Newton-Leibniz 公式在二维空间的推广。为说明这一点，设f在$[a,b]$上具有连续导函数，$\Omega=[a,b]\times[0,1]$（其图形的四个定点依次记为A，B，C，D，见图 8.8.6）。利用 Green 公式可得

$$\iint_\Omega f'(x)dxdy=\int_{\partial\Omega}f(x)dy,$$

即得

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)dx&=\int_0^1 dy\int_a^b f'(x)dx\\&=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)f(x)dy\\&=\left(\int_{BC}+\int_{DA}\right)f(x)dy\\&=\int_0^1 f(b)dy+\int_1^0 f(a)dy=f(b)-f(a)。\end{aligned}$$

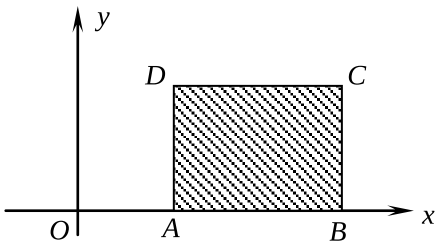


图 8.8.6

这就是 Newton-Leibniz 公式。

二．Stokes 公式

在 Green 公式基础上建立起来的 Stokes 公式，揭示了第二类曲面积分与以该曲面边界曲线为路径的第二类曲线积分之间的内在关系，可视作 Green 公式的一个自然推广。

设Σ是具有分段光滑边界的光滑的有向曲面，今按右手规则确定Σ的边界$\partial\Sigma$的定向：即右手的四指按$\partial\Sigma$的正向弯曲时，姆指指向Σ的法向。称$\partial\Sigma$的这个定向为Σ的**诱导定向**。

定理 8. 8. 2（Stokes 公式） 设Σ为光滑的有向曲面，其边界$\partial\Sigma$为分段光滑闭曲线。如果三元函数P，Q，R在Σ及其边界上具有连续一阶偏导数，则

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz\\&=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\end{aligned}$$

$$= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(\boldsymbol{n}, x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(\boldsymbol{n}, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(\boldsymbol{n}, z) \right] dS,$$

其中 $\partial\Sigma$ 按诱导定向。

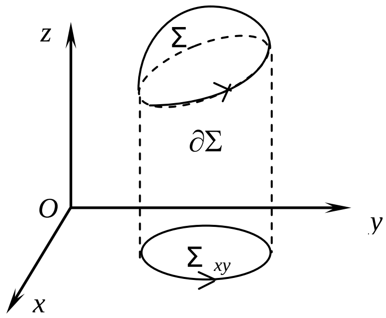


图 8.8.7

证　为避免复杂的论述，只讨论曲面 Σ 可以同时作如下三种描述的情况，即

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = z(x, y), (x, y) \in \Sigma_{xy}\}$$
$$= \{(x, y, z) \mid y = y(z, x), (z, x) \in \Sigma_{zx}\}$$
$$= \{(x, y, z) \mid x = x(y, z), (y, z) \in \Sigma_{yz}\}。$$

不失一般性，设 Σ 的定向取作上侧（见图 8.8.7）。先把空间 $\mathbf{R}^3$ 中沿 $\partial\Sigma$ 的第二类曲线积分 $\int_{\partial\Sigma} P(x, y, z)dx$ 化为平面上沿 $\partial\Sigma_{xy}$ 的第二类曲线积分，再应用 Green 公式化为二重积分得

$$\int_{\partial\Sigma} P(x, y, z)dx = \int_{\partial\Sigma_{xy}} P(x, y, z(x, y))dx = -\iint_{\Sigma_{xy}} (P'_y + P'_z z'_y)dxdy。$$

注意到 Σ 上侧的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为：

$$\cos(\boldsymbol{n}, x) = \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos(\boldsymbol{n}, y) = \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

$$\cos(\boldsymbol{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

从而有向面积微元的投影间满足关系

$$-z'_y dxdy = -z'_y \cos(\boldsymbol{n}, z)dS = \cos(\boldsymbol{n}, y)dS = dzdx。$$

再把前面得到的二重积分转化为第二类曲面积分，则有

$$\iint_{\Sigma_{xy}} P'_y(x, y, z(x, y))dxdy = \iint_{\Sigma} P'_y(x, y, z)dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma_{xy}} P'_z(x, y, z(x, y))z'_y(x, y)dxdy = \iint_{\Sigma} P'_z(x, y, z)z'_y(x, y)dxdy$$
$$= -\iint_{\Sigma} P'_z(x, y, z)dzdx。$$

因此，

$$\int_{\partial\Sigma} P(x, y, z)dx = -\iint_{\Sigma_{xy}} (P'_y + P'_z z'_y)dxdy = \iint_{\Sigma} P'_z dzdx - P'_y dxdy。$$

同理可证

$$\int_{\partial\Sigma} Q(x, y, z)dy = \iint_{\Sigma} Q'_x dxdy - Q'_z dydz。$$

$$\int_{\partial\Sigma} R(x, y, z)dz = \iint_{\Sigma} R'_y dydz - R'_x dzdx。$$

三式相加，即得 Stokes 公式。

证毕

注　对 Σ 是 Oxy 平面上区域的特殊情况，Stokes 公式就是 Green 公式。

为便于记忆，定理中 Stokes 公式用第二类曲面积分和第一类曲面积分描述的两种形式又可分别表示为

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \text{。}$$

上述积分号后两个行列式均应按第一行展开，并把$\dfrac{\partial}{\partial x}$与$Q$的“乘积”理解为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$等等。

例 8.8.6 计算第二类曲线积分

$$\oint_L 3zdx + 5xdy - 2ydz,$$

其中L是平面$y+z=2$和圆柱面$x^2+y^2=1$的交线，顶视为逆时针走向（图 8.8.8）。

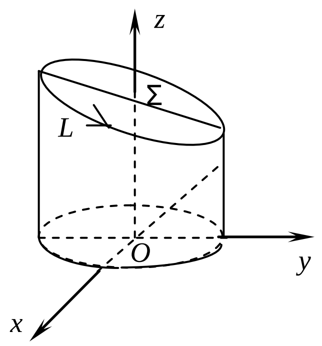


图 8.8.8

解法一 取Σ为平面$y+z=2$被圆柱面$x^2+y^2=1$截得的椭圆盘，定向为上侧。由 Stokes 公式得

$$\oint_L 3zdx + 5xdy - 2ydz$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial(-2y)}{\partial y} - \frac{\partial(5x)}{\partial z}\right]dydz + \left[\frac{\partial(3z)}{\partial z} - \frac{\partial(-2y)}{\partial x}\right]dzdx + \left[\frac{\partial(5x)}{\partial x} - \frac{\partial(3z)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} (-2)dydz + 3dzdx + 5dxdy$$

由于Σ的方程为$z=2-y$，定向为上侧，此时$z'_x=0$，$z'_y=-1$，从而

$$\iint_{\Sigma} (-2)dydz + 3dzdx + 5dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} [(-2)\times 0 + 3\times 1 + 5]dxdy$$

$$= 8\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy = 8\pi \text{。}$$

于是

$$\oint_L 3zdx + 5xdy - 2ydz = 8\pi \text{。}$$

解法二 取Σ为平面$y+z=2$被圆柱面$x^2+y^2=1$截得的椭圆盘，按上侧取单位法向量

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \text{。}$$

Σ的边界，即L，是一个椭圆，其长轴在平面$x=0$上，位于长轴的两个顶点分别为$(0,1,1)$和$(0,-1,3)$。因而长半轴为$\sqrt{2}$，又易知其短半轴为 1，故而这个椭圆的面积为$\sqrt{2}\pi$。

由 Stokes 公式

$$\oint_L 3zdx+5xdy-2ydz$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix} dS$$

$$=\iint_\Sigma \left\{\left[\frac{\partial(-2y)}{\partial y}-\frac{\partial(5x)}{\partial z}\right]\cdot 0+\left[\frac{\partial(3z)}{\partial z}-\frac{\partial(-2y)}{\partial x}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}+\left[\frac{\partial(5x)}{\partial x}-\frac{\partial(3z)}{\partial y}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}dS$$

$$=\iint_\Sigma \frac{3+5}{\sqrt{2}}dS=4\sqrt{2}\iint_\Sigma dS=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\pi=8\pi\text{。}$$

例 8.8.7　计算第二类曲线积分

$$\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz\text{，}$$

其中 L 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标平面所截的三角形 Σ 的边界，顶视为逆时针方向（图 8.8.9）。

解　Σ 位于平面 $x+y+z=1$ 上，其法向量的三个方向余弦均为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，又易知 Σ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

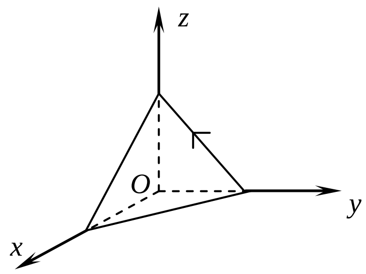


图 8.8.9

由 Stokes 公式可得

$$\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} dS$$

$$=-2\iint_\Sigma [(y+z)\cos(\boldsymbol{n},x)+(x+z)\cos(\boldsymbol{n},y)+(x+y)\cos(\boldsymbol{n},z)]dS$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\text{。}$$

例 8.8.8　计算第二类曲线积分

$$\int_C (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz\text{，}$$

其中曲线 C 是螺旋线 $x=a\cos\theta$， $y=a\sin\theta$， $z=\dfrac{h}{2\pi}\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ 上自点 $A(a,0,0)$ 到点 $B(a,0,h)$ 的一段弧（图 8.8.10）。

解　有向曲线 C 和有向直线 $\overline{BA}$ 构成一个分段光滑的闭曲线，记以这条闭曲线为边界、任意选取的一个光滑闭曲面为 Σ，并取 Σ 的定向符合右手定则。于是

$$\left(\int_C+\int_{\overline{BA}}\right)(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[\frac{\partial(z^2-xy)}{\partial y}-\frac{\partial(y^2-zx)}{\partial z}\right]dydz+\left[\frac{\partial(x^2-yz)}{\partial z}-\frac{\partial(z^2-xy)}{\partial x}\right]dzdx$$

$$+\left[\frac{\partial(y^2-zx)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2-yz)}{\partial y}\right]d\,x\,d$$

$$=\iint_{\Sigma}0\cdot dydz+0\cdot dzdx+0\cdot dxdy=0\text{。}$$

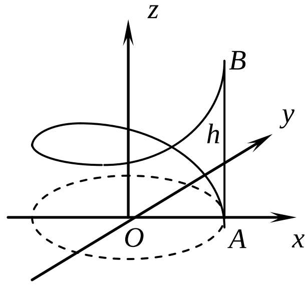


图 8.8.10

这样，

$$\int_{C}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_{\overline{AB}}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_0^h(z^2-a\cdot 0)dz=\frac{h^3}{3}\text{。}$$

三．习　　题

1．（1）、（2）、（4）；2．（1）、（3）；3．（1）、（2）；4．（1）、（3）；5；6。