教　案

一元函数的 Taylor 公式

教学内容

用简单的函数近似表示较复杂的函数是一种经常使用的数学方法，Taylor 公式提供了用多项式逼近函数的一条途径，是微积分的重要工具之一，也是后继课程“函数的幂级数展开”一节的基础，它们在理论上和应用中都起着重要的作用。在这节中主要讲解以下几方面的内容：

（1） 带 Peano 余项的 Taylor 公式和带 Lagrange 余项的 Taylor 公式；

（2） Maclaurin 公式；

（3） 具体函数的 Taylor 展开方法和用 Taylor 公式作近似计算的方法。

教学思路和要求

（1） Taylor 公式是一元微分学学习中的一个难点，初学者往往对于其“复杂”形式产生畏惧，因而对这部分的内容只是死记硬背，不能达到深刻领会的效果。因此要讲清楚这个问题的来龙去脉，使学生能从形式上的公式看清它的本质，进而提高其领会能力。

（2） Taylor 公式与基本初等函数 e^x， $\sin x$， $\cos x$， $(1+x)^\alpha$ 和 $\ln(1+x)$ 等的 Taylor 公式是本节内容的基础和重点。

（3） 虽然一些基本初等函数的 Taylor 公式是从定义直接推导出来的，但一般来说直接利用定义计算具体函数的 Taylor 公式往往很不方便，因此有必要向学生介绍一些方便而实用的计算方法，提高他们的计算能力。

（4） 对于具体函数的 Taylor 公式的计算到多少阶，学生们往往只能根据习题要求来做，但在实际应用中，计算一个函数的 Taylor 公式到多少阶是要灵活掌握的。因此有必要在讲 Taylor 公式的应用时，在这方面加以适当引导，发挥他们的主观能动性。

教学安排

一．问题的引入

我们已经知道，如果 f 在 x_0 处可微，那末在 x_0 邻近就有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(|x-x_0|)。$$

这意味着当我们用一次多项式 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 近似代替 $f(x)$ 时，其精确度对于 $x-x_0$ 而言，只达到一阶，即误差为 $o(|x-x_0|)$。为了提高精确度，必须考虑用更高次数的多项式作逼近。由于多项式是一类比较简单的函数，借助于近似多项式研究函数的性态无疑会带来很大的方便。而且，在实际计算中，由于多项式只涉及加、减、乘三种运算，以它取代复杂的函数作运算也将有效地节约工作量。

二．问题的探索

我们的讨论从下面的问题开始：设函数 f 在 x_0 处 n 阶可微，试找出一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式，

$$a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n，$$

使这个多项式与 f 之差是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小。

首先，如果成立着

（*）
$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n),$$

我们来讨论一下多项式各项的系数 a_i 与 f 的关系。

在（*）式两边令 $x\to x_0$，利用 f 在 x_0 的连续性，得

$$a_0=f(x_0)。$$

把 a_0 代入（*）式，移项后得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{i=1}^{n}a_i(x-x_0)^{i-1}+o((x-x_0)^{n-1}),$$

在上式两边再令 $x\to x_0$，由 $f'(x_0)$ 的定义可得

$$f'(x_0)=a_1。$$

把 a_0，a_1 代入（*）式，移项后得

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\sum_{i=2}^{n}a_i(x-x_0)^{i-2}+o((x-x_0)^{n-2}),$$

在上式两边令 $x\to x_0$，右边的极限为 a_2，左边的极限为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0)。$$

因此，$a_2=\frac{1}{2}f''(x_0)$。依此类推，可得

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0),\qquad k=0,1,2\cdots,n,$$

其中，记 $f^{(0)}(x)=f(x)$。

三．定理的叙述和证明

定理 1（带 Peano 余项的 Taylor 公式） 设函数 f 在 x_0 处有 n 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n)。$$

证 记 $R(x)=f(x)-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i$，则有

$$R(x_0)=R'(x_0)=R''(x_0)=\cdots=R^{(n)}(x_0)=0。$$

反复应用 L'Hospital 法则，可得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\cdots\cdots$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n-1)}(x)-R^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{n!}R^{(n)}(x_0)=0\text{。}$$

因此，$R(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$。

定理 2（带 Lagrange 余项的 Taylor 公式） 设函数 f 在点 x_0 的某邻域内 $n+1$ 阶可微，则在此邻域内成立

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$。

证 记 $R(x)=f(x)-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i$，则有

$$R(x_0)=R'(x_0)=\cdots=R^{(n)}(x_0)=0,$$

$$R^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x).$$

利用 Cauchy 中值定理，可得

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R(x)-R(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n},$$

其中 ξ_1 介于 x_0 与 x 之间，从而

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R'(\xi_1)-R'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}},$$

其中 ξ_2 介于 x_0 与 ξ_1 之间，从而介于 x_0 与 x 之间。依此类推，即得

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间。记 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，必有 $0<\theta<1$。这样

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\text{。}$$

四．两点讨论

（1） 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式是 Lagrange 中值定理的推广。

（2） 如果函数 f 的 $n+1$ 阶导数在 (a,b) 中有界：$|f^{(n+1)}(x)|\le M$，$x\in(a,b)$，$x_0\in(a,b)$ 那末，在 (a,b) 中有如下的余项估计：

$$|R(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\text{。}$$

五．定理的一个常用形式：Maclaurin 公式

如果 $x_0=0$，那末带有以上两种余项形式的 Taylor 公式又称为 Maclaurin 公式，此即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

和

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad（0<\theta<1）\text{。}$$

由此得到近似公式：

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\text{。}$$

六．具体函数的 Taylor 公式及其应用

（1）根据定义求e^x， $\sin x$， $\cos x$， $(1+x)^\alpha$和$\ln(1+x)$的 Taylor 公式。

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1});$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\text{。}$$

（2）利用上述公式求简单的初等函数 Taylor 公式。

例 1　求 $f(x)=\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 的带 Peano 余项的 3 阶 Maclaurin 近似。

解　$\sqrt[3]{1-3x+x^2}=\left[1+(x^2-3x)\right]^{\frac{1}{3}}$

$$=1+\frac{1}{3}(x^2-3x)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(x^2-3x)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}(x^2-3x)^3+o(x^3)$$

$$=1-x-\frac{2}{3}x^2-x^3+o(x^3)\text{。}$$

例 2　把函数$\ln\frac{\sin x}{x}$在$x_0=0$处展开至x^6的项。

解　利用

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8),$$

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3),$$

得到

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln[1+(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^7))]$$

$$=\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^7)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{3!}+o(x^3)\right)^3+o(x^6)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6)\text{。}$$

（3）利用 Taylor 公式计算极限

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$。

解 这是个 $\dfrac{0}{0}$ 待定型的极限问题。如果用 L'Hospital 法则，则分子分母需要求导 4 次，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3} \qquad \text{（仍为}\frac{0}{0}\text{型）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{12x^2} \qquad \text{（仍为}\frac{0}{0}\text{型）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - 3x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x^3\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{24x} \qquad \text{（仍为}\frac{0}{0}\text{型）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 6x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - x^4\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{24}$$

$$=-\frac{1}{12}\text{。}$$

但若采用 Taylor 公式，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

计算过程就简洁得多了。

（4）利用 Taylor 公式作近似估计和计算

例 4 在区间 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上用一个四次多项式作为函数 $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$ 的近似，并估计误差。

解 对 $(1+x)^{-\frac{1}{3}}$ 写出其三阶 Maclaurin 公式：

$$(1+x)^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{2!3^2}x^2-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3!3^3}x^3+R_3(x),$$

其中$R_3(x)=\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{4!3^4}\dfrac{x^4}{(1+\xi)^{13/3}}$，$0<\xi<\dfrac{1}{2}$。由此可得

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}\approx x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x^3-\frac{14}{81}x^4,\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],$$

其误差可估计为

$$|xR_3(x)|=\left|\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10x^5}{4!3^4(1+\xi)^{13/3}}\right|\le\frac{4\cdot 7\cdot 10}{4!3^4}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{35}{6^5}\approx 0.0045。$$

注意，若在$\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$运用上述四阶 Maclaurin 公式，则其误差可估计为

$$|xR_3(x)|\le\frac{4\cdot 7\cdot 10}{4!3^4}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{35}{(12)^5}<0.00014。$$

例 5 求$\sqrt{37}$的近似值，要求精确到小数点后第五位。

解 $\sqrt{37}=\sqrt{36+1}=6\left(1+\dfrac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}}$。如果用$(1+x)^{\frac{1}{2}}$的 2 阶 Maclaurin 公式

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

来计算，其误差不会超过

$$6\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{36^3}<0.5\times 10^{-5}。$$

它保证了小数点后面的 5 位有效数字。因此

$$\sqrt{37}\approx 6\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{36^2}\right)\approx 6.08275。$$

七．习　题

1．（1），（2）

2．（2），（4）

3．

6．

8．（提示：将$\dfrac{0}{0}$型不定式中分子与分母按 Taylor 公式展开至适当阶数。）