§5 *L'Hospital* 法则

我们已经知道两个无穷小量、两个无穷大量之比这类极限有的存在，有的则不存在，通常把这一类极限称为“未定型”的极限。此类极限不能直接运用“商的极限等于极限的商”.

本节介绍的 ***L'hospital*** 法则就是处理这类不定型极限的有效方法。

一、不定型主要有以下几种形式

$\dfrac{0}{0}$型、$\dfrac{\infty}{\infty}$型、$0\cdot\infty$型、$\infty-\infty$型、

0^0型、∞^0型、1^∞型，

其中 $\dfrac{0}{0}$ 型、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型为最基本的不定型，

其它不定型均可化为这两类不定型。

二、*L'Hospital* 法则 $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

定理: 设 1）函数 f、g 在 $U_{(x_0)}$ 内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

2）在这个 $U_{(x_0)}$ 内，f'、g' 存在（x_0 除外），

且 $g'(x)\neq 0$

3）$\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（*or* ∞），

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{ 存在}(or\ \infty)$$

证：设 $f_1(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq x_0 \\ 0 & x=x_0 \end{cases}$ $g_1(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq x_0 \\ 0 & x=x_0 \end{cases}$

$\therefore \forall x\in U(x_0)\ \ x\neq x_0$ 在 $[x_0, x]$ 上，

$f_1(x)$、$g_1(x)$ 满足 *Cauchy* 中值定理

$\therefore$ 必存在一点 $\xi\in(x_0, x)$，当 $x\to x_0$ 时，$\xi\to x_0$

$$\ni \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注意：1）定理的条件：分子分母都是无穷小；

分子分母都可导，且分母的导数不等于0；

导数之比的极限存在或为∞；

2）定理的结论是：

函数之比的极限等于导数之比的极限；

3）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是未定式，且 $f'(x)$、$g'(x)$

满足定理中对 $f(x)$、$g(x)$ 所要求的条件，

则可继续使用法则，直到不再是未定型为止。

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots$$

4）当 $x\to\infty\ (or\ x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty)$ 结论仍成立。

例1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

例2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\ln(1+x)}$

三、*L'Hospital* 法则 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

定理： 设 1）函数 f、g 在 $U_{(x_0)}$ 内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$$

2）在这个 $U_{(x_0)}$ 内，f'、g' 存在（x_0 除外），

且 $g'(x)\neq 0$

3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（$or\ \infty$），

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{ 存在}(or\ \infty)$$

当 $x\to\infty\ (or\ x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty)$ 结论仍成立。

例3、求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

例4、求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

例5、计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}} \quad (\lambda,\ \mu>0)$

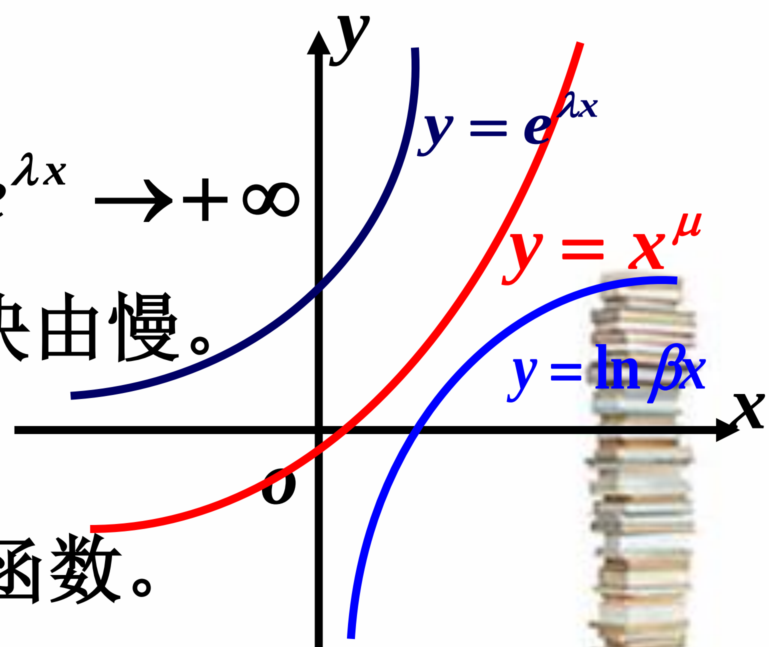
同理 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\beta x}{x^{\mu}}=0$

说明 当$x\to+\infty$时，$\ln\beta x, x^{\mu}, e^{\lambda x}\to+\infty$

但它们趋于$+\infty$的速度有快由慢。

依次是：

指数函数，幂函数，对数函数。



四、其他不定型的极限

通过适当的恒等变形将其化为基本型，再用 *L'Hospital* 法则来求极限。

$0\cdot\infty$ 型

$$0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \quad \text{或} \quad 0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0}{0}$$

例6、求 $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$

$\infty-\infty$型

$$\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$$

例7、求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$

$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$ 型　　即求 $\lim f(x)^{g(x)}$

$$\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{或取对数}]{\text{换底}} \lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

即 $$\left\{\begin{matrix} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\cdot\infty$$

例8、求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$　　(∞^0)

例9、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan n\right)^{\frac{1}{\ln n}}$

说明

1）*L'Hospital* 法则是求未定型极限的一种有效方法，与其它求极限方法结合使用（尤其是等价方法）更有效，使用前宜先约去可约因子，特别是极限不为零的因子，宜将确定后的极限值提到极限号外，可简化运算过程。

例10、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x}-e^{x}+1}{6(e^{x}-1)e^{x}}$

例11、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

2）*L'Hospital* 是求未定型极限的一种有效工具，

但不是万能的，有时会失效。

例12、求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

3）当 $x \to 0$ 时，出现 $\sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x}$;

或当 $x \to \infty$ 时，出现 $\sin x, \cos x$;

均不宜用 *L'Hospital* 法则。

例13、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}$

4）进行恒等变形或变量代换，以简化计算。

例14、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^{-2}}}{x^{1000}}$

综合练习

1、求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1})$

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}(\tan^2 x)^{\frac{1}{\ln|x|}}$

3、设 $f''(x)$ 存在，求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

思考题

设 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是不定型极限，如果 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限不存在，是否 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也一定不存在？举例说明。