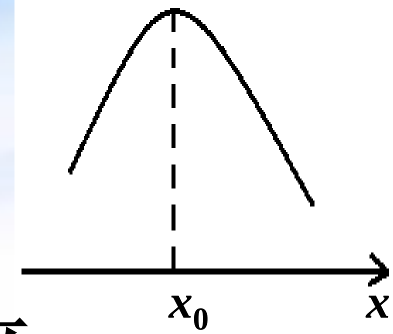
§4 微分学中值定理

微分和导数是讨论小增量的有效工具。微分中值定理是研究宏观增量、函数特征的一个有力工具，不仅是微分学中最重要的结论之一，而且在积分学、级数理论等以高等数学为基础的许多后续课程中，发挥着重要的作用，也是研究问题的重要辅助手段。

一、函数极值和 *Fermat* 定理



设有函数 f，如果在 $U(x_0)$ 中的一切 x，

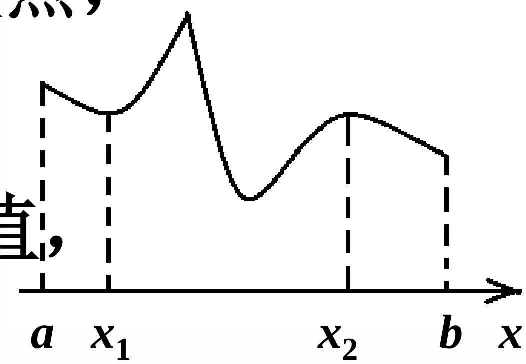
恒有 $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ 成立，

则称 x_0 为函数 f 的局部极大（小）值点，

简称 极大（小）值点；

称 $f(x_0)$ 为函数 f 的局部极大（小）值，

简称 极大（小）值。

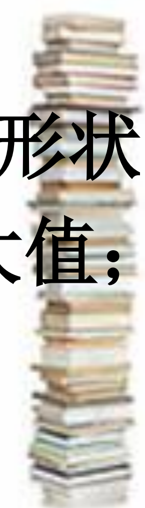


注意：

极值是局部的概念，只取决于点 x_0 邻近 f 的形状；

在 (a, b) 内，f 的极小值完全可能大于其极大值；

f 在 (a, b) 中极值点可以有无数个。



Fermat 定理：

设点 x_0 是函数 f 的一个极值点，且 f 在 x_0 处可导则必有 $f'(x_0)=0$.

证：不妨设在 $U(x_0,\delta)$ 内，$f(x)\le f(x_0)$

当 $x<x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$

当 $x>x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$

$$0\ge \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\|$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=0$$

Fermat 定理的几何意义

若曲线 $f(x)$ 在其极点处可导，或者说在该点存在切线，那么这条切线必定平行于 x 轴。

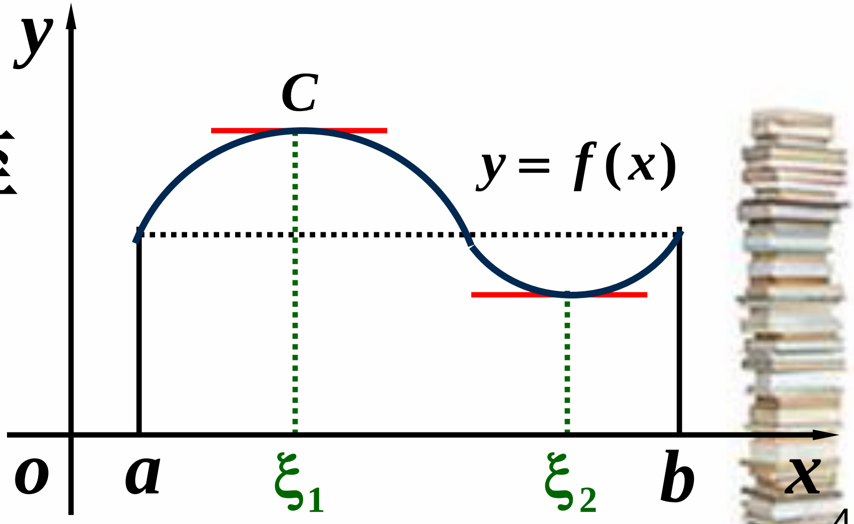
二、 *Rolle* 定理

设函数 $f \in C_{[a,b]}$，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，$\ni f'(\xi) = 0$

几何意义：

满足定理条件的函数至少有一点 C，在该点处的切线平行于 x 轴，也与曲线两端点的连线平行。



证： $\because f(x)\in C_{[a,b]}$ 必有最大值 M 和最小值 m，

1）若 $M=m$，则 $f(x)=M$　　又 $\because f$ 在 ξ 处可导，

$\therefore f'(x)=0$　$\forall\,\xi\in(a,b)$　都有 $f'(\xi)=0$；

2）若 $M\neq m$　$\because f(a)=f(b)$

$\therefore$最值不可能同时在端点取得

设 $M\neq f(a)$，即 $M\in(a,b)$ 内，当然 $M\neq f(b)$

不妨设 $M=f(\xi)$，

则 $M=f(\xi)>f(a)=f(b)$，　$\xi\in(a,b)$

由极值点的定义，显然 ξ 是极大值点，

由 Fermat 定理，　$\therefore f'(\xi)=0$；

$\therefore f'(\xi)=0$.

例1、设 $f(x)\in C_{[a,b]}$ 在 (a,b) 内可导，$a>0$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，

$\ni \quad 2\xi[f(a)-f(b)]=(a^2-b^2)f'(\xi)$

例2、设 $f(x)\in C_{[0,1]}$，$f(x)\in D_{[0,1]}$，且 $f(0)=f(1)=0$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$， 证明：$\exists\,\xi\in(0,1),\ni f'(\xi)=1$

三、微分学中值定理

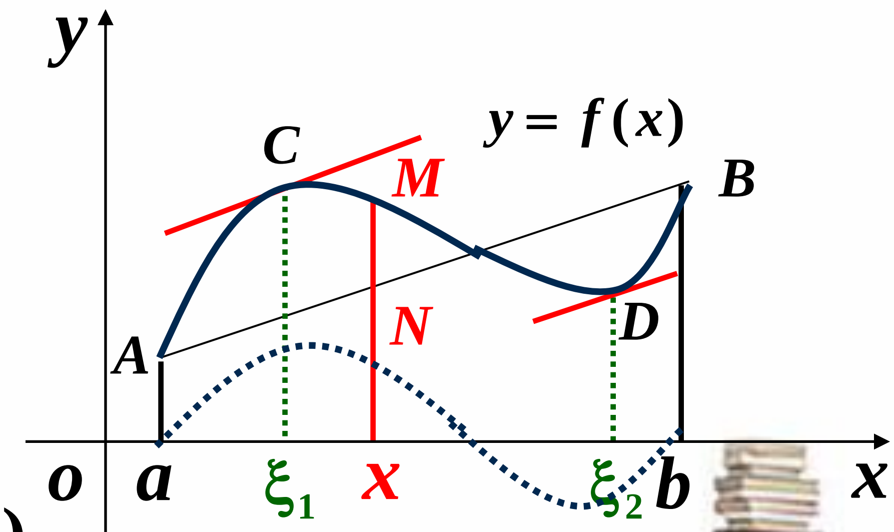
Lagrange 中值定理

设函数 $f \in C_{[a,b]}$，在 (a, b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，$\ni$ $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

几何意义：

在曲线弧 AB 上至少有一点 C，在该点处的切线平行于弦 AB.



证：作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

显然 $\varphi(x) \in C_{[a,b]}$，在 (a, b) 内可导，且

$$\varphi(a) = f(a) = \varphi(b) = f(a)$$

$\therefore$ 由 *Rolle* 定理可知

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, $\ni \varphi'(\xi) = 0$

即 $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$\therefore f'(\xi) = \frac{f(b) - (a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$$

$$\therefore f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a) \qquad (*')$$

记 $x = a \quad \Delta x = b - a \qquad 0 < \theta < 1$

$$\therefore f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x \qquad (*'')$$

$$0 < \theta < 1$$

$(*), (*'), (*'')$ 均为 *Lagrange* 公式

推论1 设 f 是 (a, b) 上的可微函数，

对任何 $x \in (a, b)$，$f'(x) = 0$

则 f 在 (a, b) 上恒为常数。

证：对 $\forall\, a < x_0 < x_1 < b$， 由 *Lagrange* 公式

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0) \quad x_0 < \xi < x_1$$

又 $\because f'(x) = 0 \quad \therefore f(x_1) - f(x_0) = 0$

即 $f(x_1) = f(x_0)$

$\therefore f(x)$ 恒为常数。

推论2 设 f 和 g 均是 (a, b) 上的可微函数，

且 $f' = g'$，则必有常数 C，

$\ni f(x) = g(x) + C$ 在 (a, b) 上恒成立。

证：令 $F(x) = f(x) - g(x)$

$\Rightarrow F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad (f' = g')$

由推论1 $\Rightarrow F(x) = C$

即 $f(x) - g(x) = C$

利用中值定理可证明一些不等式。

例3、证明当 $x > 0$ 时， $\frac{1}{x+1} < In(x+1) - Inx < \frac{1}{x}$

例4、求极限 $\lim_{n\to\infty} n[\arctan\ln(n+1) - \arctan\ln n]$

四、柯西中值定理

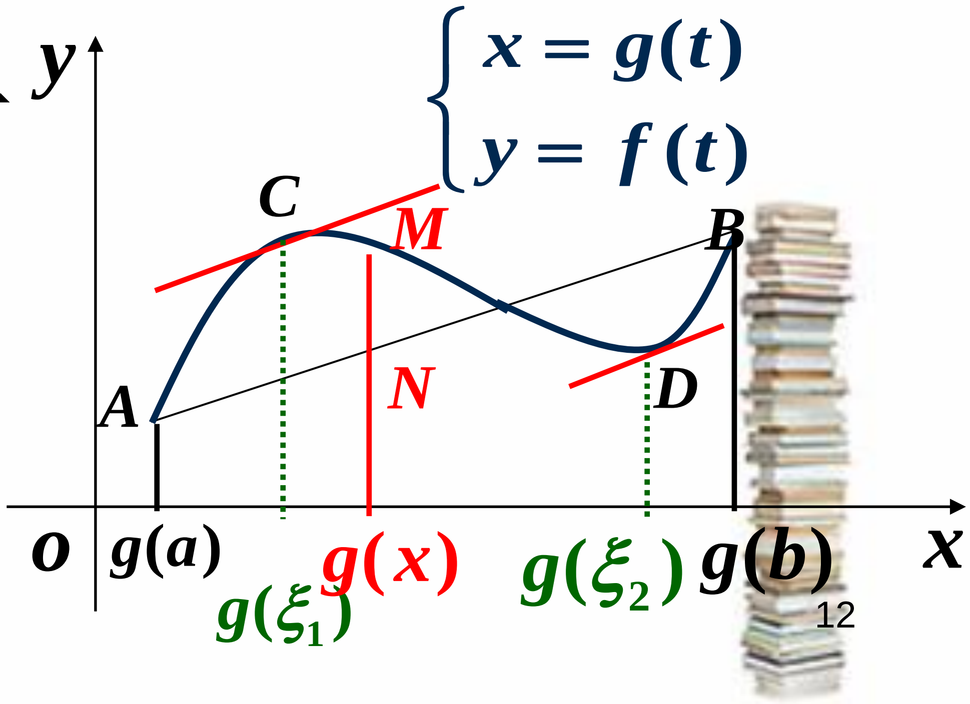
Cauchy 中值定理

设函数 f 和 g 均是 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $x \in (a,b)$，$g'(x) \neq 0$，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，$\ni$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

几何意义：

在曲线弧 AB 上至少有一点 $C(g(\xi), f(\xi))$，在该点处的切线平行于弦 AB .



证：作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

显然$\varphi(x)\in C_{[a,b]}$，在 (a,b) 内可导，

且 $\varphi(a)=f(a)=\varphi(b)=f(a)$

由 *Rolle* 定理，

至少存在一点$\xi\in(a,b)$，$\ni\varphi'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$

即等式证得。

例5、设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，

证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ ，使

$$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$$