高等数学

朱慧敏

- 数学文化与数学教育

  数学发展史

  数学发展的应用和趋势

  数学的社会需要

  数学家的创新精神

  数学科学的思想体系

  数学的美学价值

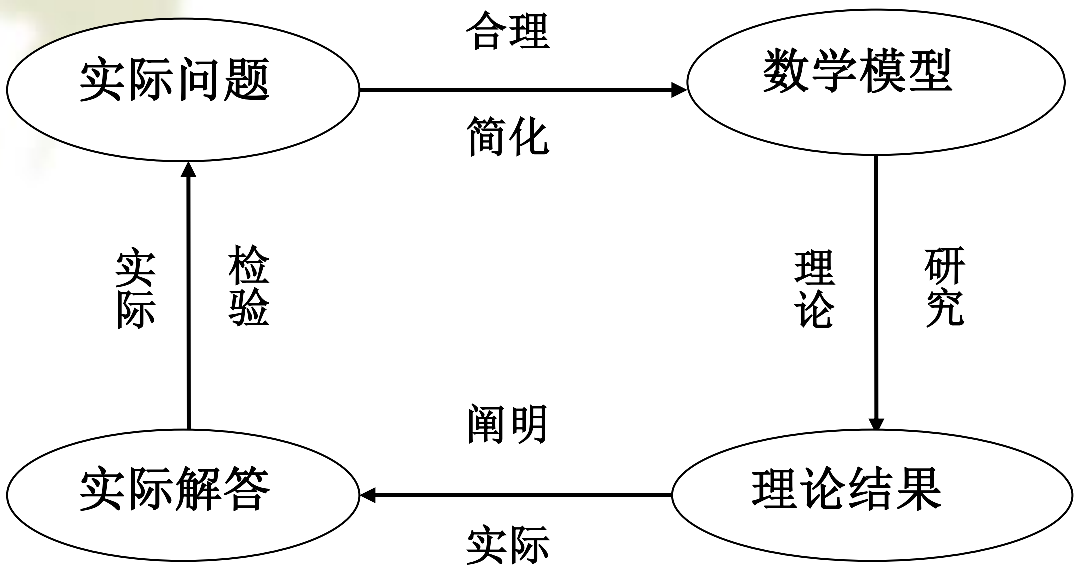
科学大师在解决问题的过程中有如下共同点：

1）善于将一个实际问题经过合理简化，抽象成一个（数学） 模型；

2）在研究这个（数学）模型中，能将获得的理论结果来阐明实际现象和实际意义；

3）能通过实践来检验和匡正理论模型，以便进一步改进和完善之。

非数学专业的学生学习数学的目的



解决实际问题的途径

- 学习高等数学的重要性
- 学习方法

理解核心的概念和关键的内容，并通过严格的训练，真正学到手，能得心应手地加以应用和发挥，这才掌握其精髓。

数学是一门演绎的学问，从一组公设，经过逻辑的推理，获得结论；

注重：

概念理解，思维方式及应用，创新精神。

- 数学研究的对象

  现实世界的数量关系和空间关系

- 现代医学与数学的结合产生了许多边缘学科

  * 数量遗传学
  * 计量诊断学
  * 生物数学
  * 流行病学
  * 免疫学、药理、药浓度、药物代谢
  * 医学统计、卫生统计
  * 生物信息学

案例　复旦大学控股的复华集团购并了上医大的红旗制药厂

数学发展纵横谈

数学是什么？

1）数学是作为关于数、量、几何图形的科学；

2）数学是作为关于量的变化及几何的映像的科学；

3）数学是作为关于现实世界一切普遍性、抽象化的数量形式及其空间形式的科学。

数学发展纵横谈

数学发展史告诉我们

1、数学家是普通人；

2、先人数学创造的思想、发现的能力；

3、数学发展的进程；

4、数学规律的发展。

数学发展纵横谈

数学发展的四部曲

数学交响曲有四个乐章组成：

精确数学、随机数学、模糊数学、突变数学。

数学按质分类：

必然现象、或然现象、模糊现象、突变现象。

1）必然现象与精确数学—激昂的第一乐章

①没有微积分就没有万有引力定律

②早期具有代表性的数学模型

③数学思想的两次重大转折：

a、从算术到代数

b、从常量数学到变量数学

2）或然现象（随机现象）与随机数学—第二乐章

a、随机现象是指事物的变化发展具有几种不同的可能性，究竟何种结果，有随机性、偶然性。

b、随机数学主要包括概率论、随机过程理论、数理统计学。

c、随机数学与经典数学、自然科学、社会科学相互作用产生出许多新的学科：平稳随机过程论、马尔科夫过程论、多元统计分析、试验分析、生物统计学、医学统计等。

3）模糊现象与模糊数学—第三乐章

a、模糊现象是指客观事物界限不分明的量和性质，即不分明现象。

b、模糊数学是用数量表示一个事物属于某个模糊概念的程度，即隶属度，以此说明该事物能否包含在那个模糊概念的论域中。

c、现在模糊数学应用领域相当广泛，产生了许多学科：模糊信息、模糊控制、模糊规划与决策、模糊语言、模糊逻辑等；

d、模糊数学未来最重要的应用领域，在计算机模拟识别和人工智能方面：
模糊智能家电，模糊控制的洗衣机、以模糊规则为基础的照相机、模糊感应的空调等；模糊技术将红绿灯改造得更灵活；航天航空中的火星探测器离不开模糊技术；机器人足球赛中，模糊数学更是大显身手；等等。

4）突变现象与突变数学—辉煌的第四乐章

a、突变现象

b、突变理论解释了所有不连续的、突变的现象

c、突变以奇点理论为其数学基础，运用拓扑学、结构稳定性等数学工具，以形象生动的模型来把握事物的量质互变过程。

总结：

精确数学主要应用在自然科学领域；

随机数学开始向社会科学渗透；

模糊数学则将成为思维科学中的数学工具；

突变理论则向各个领域渗透（经济、胚胎学）；

合奏出壮美的交响乐

第一篇 一元函数微积分

微积分产生背景和主要矛盾运动：

静止与运动、静态与动态、有穷与无穷、常量与变量、离散与连续、稳态与瞬态、均匀与不均匀、不变与变化、直与曲等等矛盾。

微积分的主要课题：

研究变量的变化性态，刻划这种变化过程的特征：利用变量的变化趋势、变化速度、变化的累积效应等要素。

第一章　极限与连续

* 介绍极限的基本概念、性质和运算
* 讨论微积分主要研究的对象
  —连续函数、及其性质和基本运算

§1 函数

函数是变量变化关系最基本的数学描述

一、函数概念

定义：

设 D 是实数集 R 的一个子集，如果按某规则 f ，对 D 中每个数 x ，均有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是以 D 为定义域的一元函数，称 x 为自变量， y 为应变量。

函数关系记作： $f: D \to R \quad x \mapsto y \quad \forall x \in D$

记为 $\quad y = f(x) \quad \forall x \in D$

函数 f 的值域 $R = \{ f(x) \mid x \in D \}$

函数 $y = f(x)$ 成立必然包含三个因素：

(1) 定义域：x 的取值范围 D_f

(2) 对应规律：y 依赖于自变量 x 的变化法则

(3) 值域：所有对应的 y 值组成的数集 R_f

如果两个函数 f_1， f_2 满足 $D_{f_1} = D_{f_2}$ 且

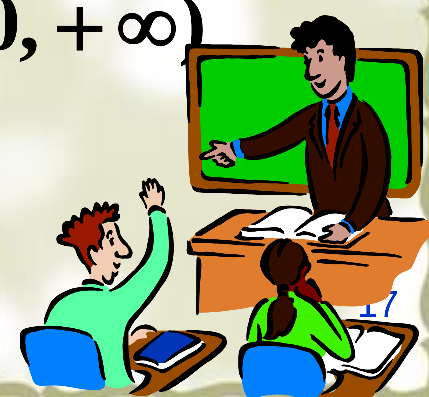
$f_1(x) = f_2(x)\quad \forall x \in D_{f_1}$ 则有 $f_1 = f_2$

只有当两函数的定义域及对应规律完全相同时，才能说两个函数是相同的或相等的。

例1、五个函数 f, g, h, u, v 分别定义为：

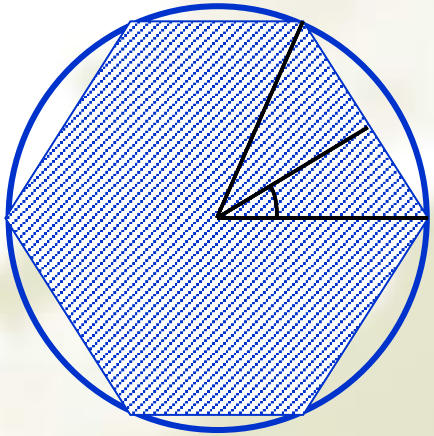
$f(x)=x$	$D_f:(-\infty,+\infty)$	$R_f:(-\infty,+\infty)$
$g(x)=\sqrt{x^2}$	$D_g:(-\infty,+\infty)$	$R_g:[0,+\infty)$
$h(x)=(\sqrt{x})^2$	$D_h:[0,+\infty)$	$R_h:[0,+\infty)$
$u(x)=Ine^{x}$	$D_u:(-\infty,+\infty)$	$R_u:(-\infty,+\infty)$
$v(x)=e^{Inx}$	$D_v:(0,+\infty)$	$R_v:(0,+\infty)$

$$\therefore \quad f(x)=u(x)$$



例2、求函数 $\sqrt{16-x^2}+\sqrt{\sin x}$ 的定义域。

例3、 设有半径为 R 的圆, 记该圆内接正 n 边形周长为 $S(n)$.



二、函数的图象

定义 设函数 f 的定义域为 D，在平面直角坐标系，

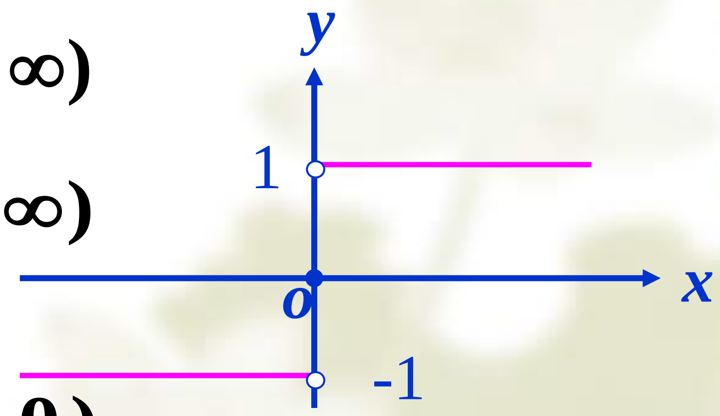
记 $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$

称 G_f 为函数 $y = f(x)$ 的图形。

几个特殊的函数举例

1、符号函数 sgn， $D_f : (-\infty, +\infty)$

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x \in (0, +\infty) \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



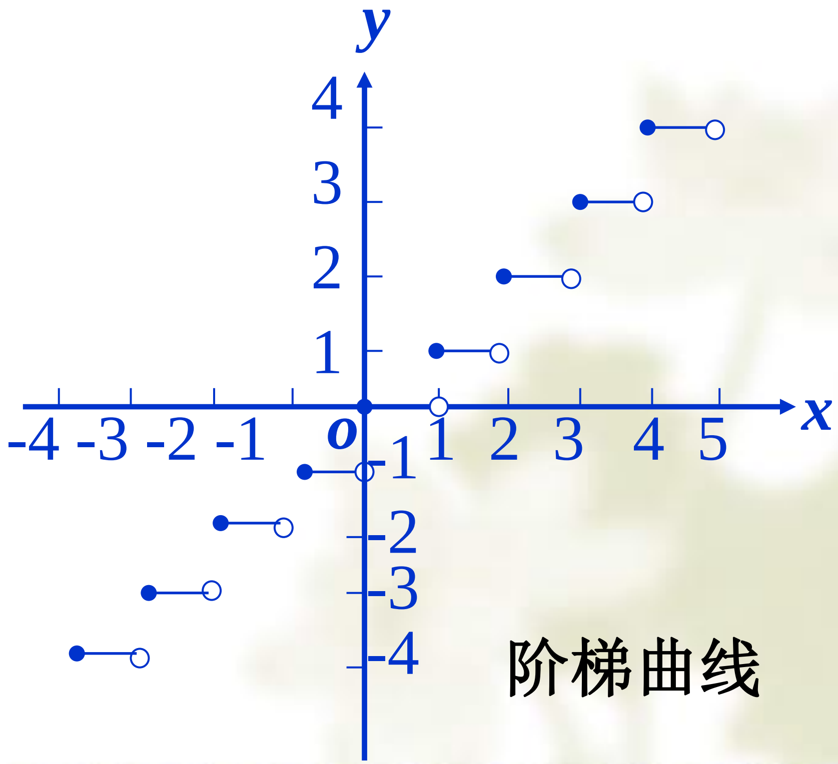
$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

2、取整函数 $f(x)=[x]$

其$[x]$是不超过 x 的最大整数，即

$$[x]=k \quad \forall\, x\in[k,k+1) \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

是单调增加函数。

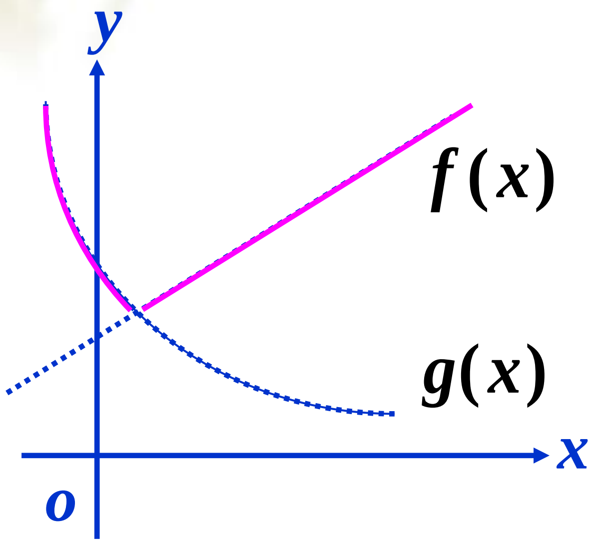


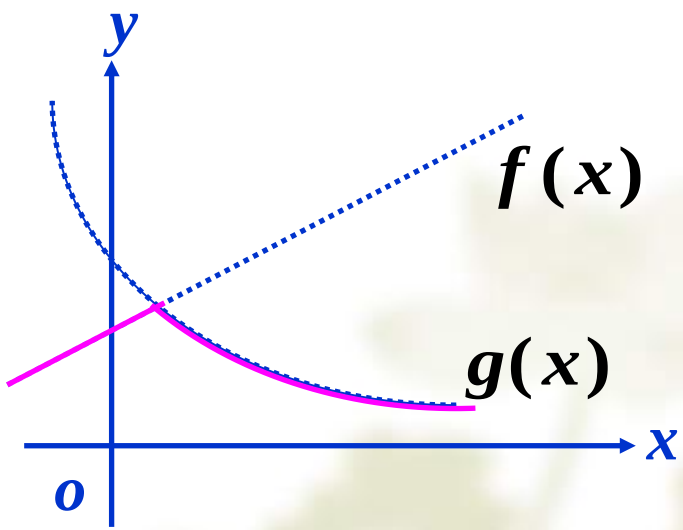
阶梯曲线

返回

3、取最值函数

$$y = \max\{ f(x), g(x)\} \qquad y = \min\{ f(x), g(x)\}$$

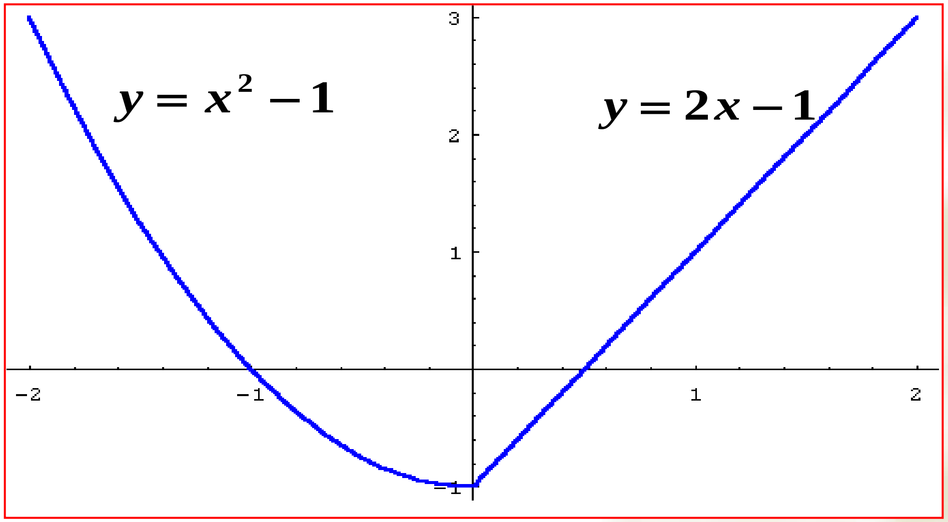




4、分段函数：

对于定义域内自变量 x 的不同取值范围，函数有不同的解析表达式

例如： $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0 \\ x^2-1, & x\le 0\end{cases}$

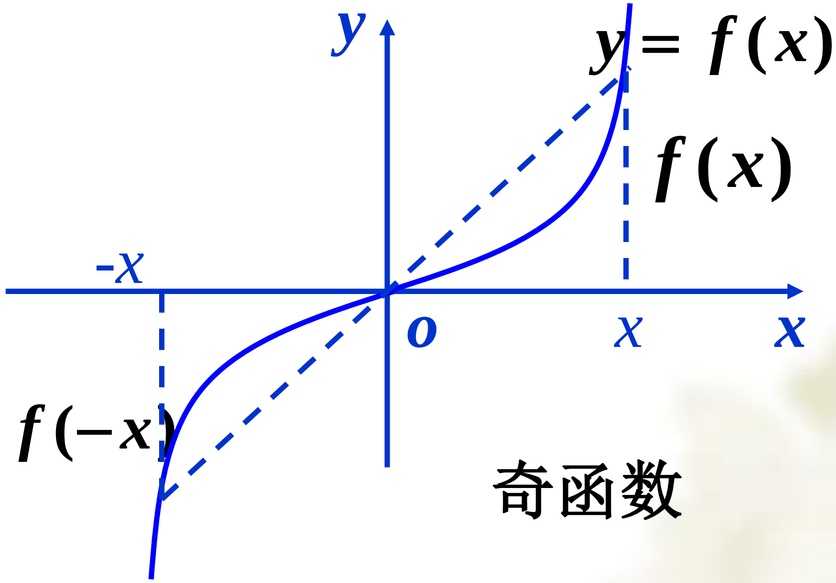


三、函数的性质

1、奇偶性

设 D 关于原点对称，对于 $\forall x \in D$，有

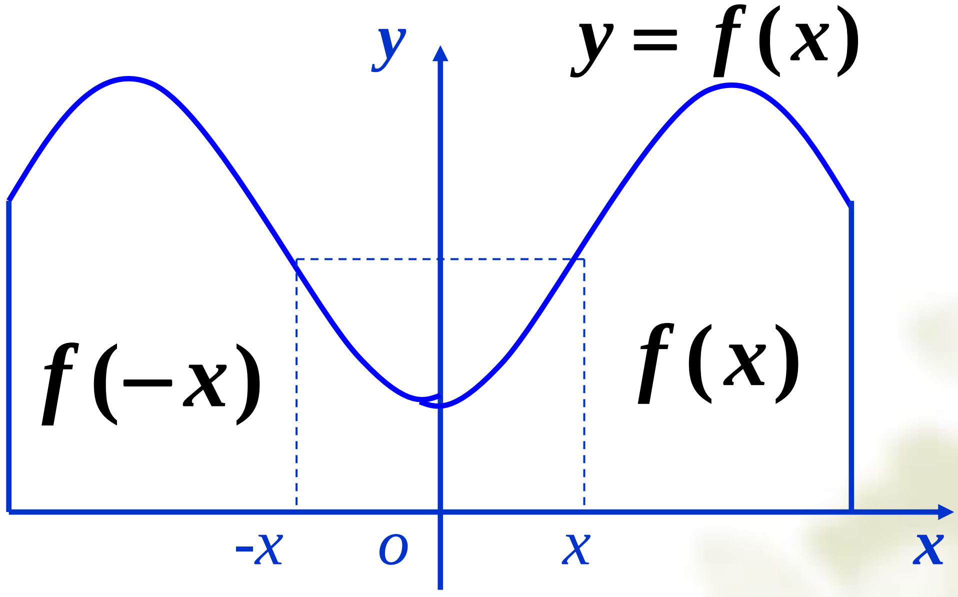
$f(-x) = -f(x)$ 称 $f(x)$ 为奇函数。



奇函数

设 D 关于原点对称，对于 $\forall x \in D$，有

$f(-x)=f(x)$ ， 称 $f(x)$ 为偶函数。

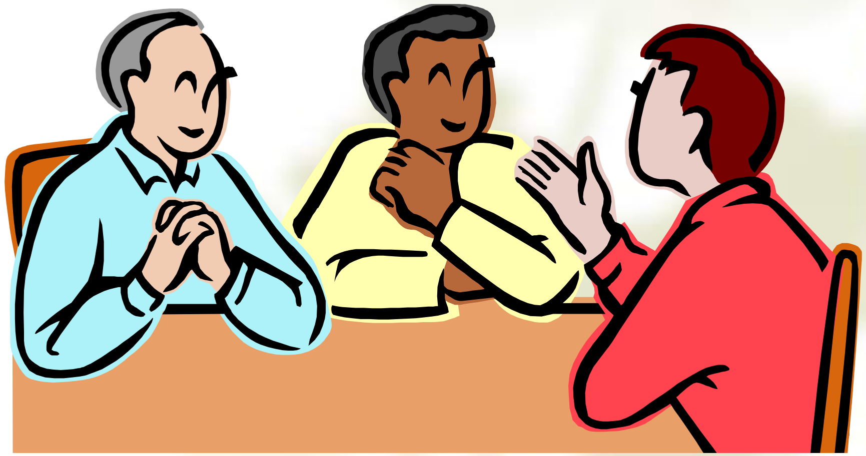


偶函数

例如： $f(x)=\sin x\,,\tan x\,,\cot x$ 是奇函数，

$f(x)=\cos x$ 是偶函数，

那么 $f \pm g$ ？ $f \times g$ ？



例4、判断函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln\left|\sec x+\tan x\right|$

(2) $f(x)=arc\tan 2^{x}-\dfrac{\pi}{4}$

例5、设函数 $f(x)$ 满足：$D(f)$ 关于原点对称，证明：$f(x)$ 可表示成一个奇函数与一个偶函数之和。

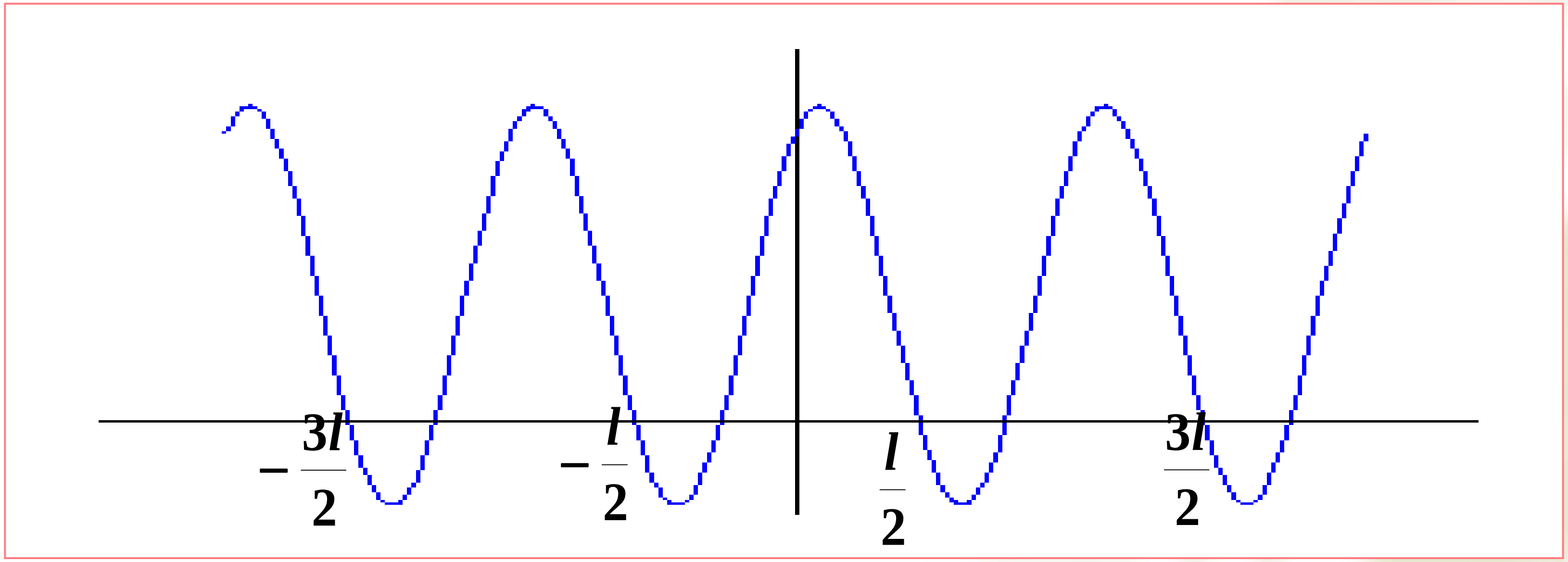
2、周期性

对于函数 f，$\exists$ 常数 $T>0$，

$\ni f(x+T)=f(x) \quad \forall x \in D_f$

则称 f 是以 T 为周期的周期函数满足上式的最小正数 T 称为 f 的最小周期。

通常说周期函数的周期是指其最小正周期。



例5、 (1) $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=\cos(\omega x+\varphi)$

是周期函数，周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$

(2) $y=\tan\omega x$ 和 $y=\cot\omega x$

是周期函数，周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$

(3) $y=\sin x,\cos x$

是以 2π为最小正周期的函数。

(4) $y=\tan x,\cot x$

是以π为最小正周期的函数。

(5) $y=\cos\frac{1}{x}$ 是周期函数吗？

例6、设函数 $f(x)$ 定义在$(-\infty,+\infty)$ 上，若有常数 $c\neq 0$,

使得 $f(x+c)=-f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$,

证明：函数 $f(x)$ 是一个周期函数。

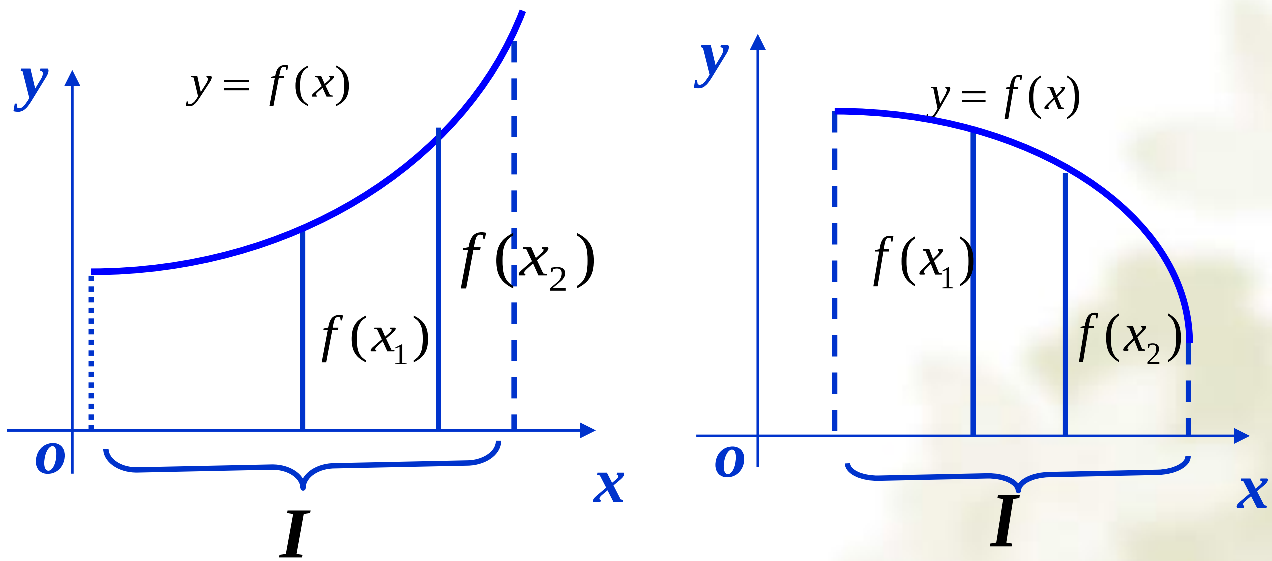
3、单调性

对于函数 f，如果任取 $x_1, x_2 \in D \subset D_f$，

当 $x_1 < x_2$ 时， 恒有

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad (\,or\ f(x_1) \ge f(x_2)\,)$$

则称 f 在 D 上是单调增加（或单调减少）的。



例如:取整函数

4. 有界性

设有函数 f，$D \subset D_f$， 若 $\exists M > 0, \forall x \in D$,

局部有界

不唯一

恒有 $|f(x)| \le M$ 成立,

则称 f 在D上有界，否则称为无界。

等价于：若$\exists$ 两个常数 m、M,

$$\ni m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in D,$$

既有上界又有下界时，称为有界，否则称为无界。

例如：$f(x) = \sin x, \cos x$ 为有界函数。

$$\because |f(x)| \le 1 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

注意:

函数是否有界，不仅与函数有关，且与区间有关。

例7、判断下列函数在给定区间上是否有界。

(1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2} \quad x\in(2,4)$

(2) $f(x)=x^2\sin x \quad x\in(0,+\infty)$

四、 复合函数

定义： 设有函数 f 和 g，

称定义在 $\left\{ x \middle| x \in D_g, g(x) \in D_f \right\}$ 上的函数

$f \circ g$ 为 f 和 g 的复合函数，记为

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

称 $u = g(x)$ 为中间变量，其中 $x \in D_{(f \circ g)}$

为自变量。

注意： 判断函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 能否构成复合函数的关键是 $f(x)$ 的定义域 D_f 与 $g(x)$ 的值域 R_g 的交集是个非空集合，即 $D_f \cap R_g \neq \phi$

例8. $f(x)=\arcsin x$, $D_f:[-1,1]$

$g(x)=2+x^2$ $R_g:[2,+\infty)$

求：复合函数 $(f\circ g)(x)$ 和 $(g\circ f)(x)$.

例9. $f(u)=\log_3 u$ $D_f:(0,+\infty)$ $R_f:(-\infty,+\infty)$

$g(v)=\sqrt{4+v}$ $D_g:[-4,+\infty)$ $R_g:[0,+\infty)$

$h(x)=x^6$ $D_h:(-\infty,+\infty)$ $R_h:[0,+\infty)$

求：复合函数 $(f\circ g\circ h)(x)$.

例10、试把 $y=\cos^2\sqrt{2+x^2}$ 分解为几个简单函数的复合（或由哪些简单函数的复合而成）

例11、设 $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 2^x & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$，

求：$g\circ f$，$g\circ g$

五、 反函数

1、定义:

设有函数 f ，如果对每一个 $y \in R_f$ ，

有唯一的 $x \in D_f$ ，满足：$y = f(x)$ ，

则称这个定义在 R_f 上的对应关系：

$$y \mapsto x$$

为函数 f 的反函数，记作 f^{-1}

由定义：$D_{f^{-1}} = R_f \quad R_{f^{-1}} = D_f$

2、性质：

1）如果 f 的反函数存在，那么

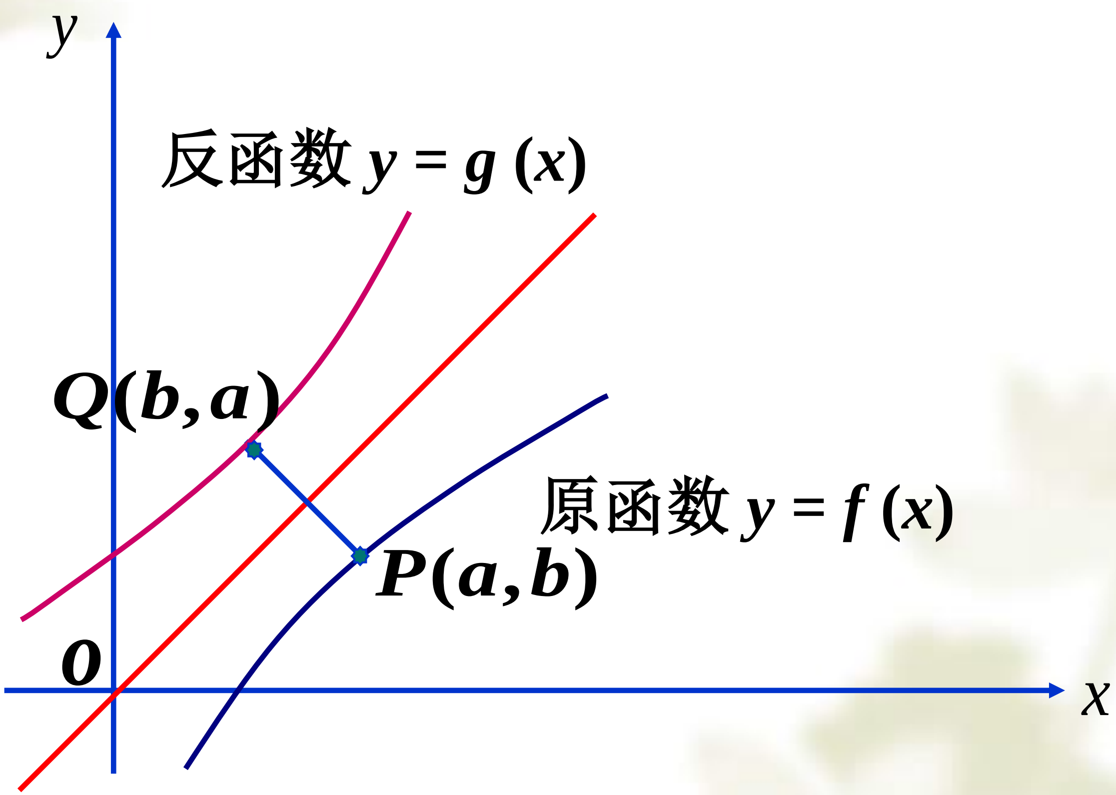
$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}[f(x)]=x \quad \forall\, x\in D_f$$

$$(f\circ f^{-1})(y)=f[f^{-1}(y)]=y \quad \forall\, y\in D_{f^{-1}}$$

2）严格单调增加（或减少）函数的反函数也是严格单调增加（或减少）函数。

3）奇函数的反函数也是奇函数；偶函数没有反函数。

4）如果反函数存在，则与原函数关于直线 $y = x$ 对称。



如：$y = e^x$ 与 $y = \ln x$ 关于 $y = x$ 对称。

例12、求函数的反函数，并指出反函数的定义域。

(1) $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$， $-1\le x<0$;

(2) $f(x)=\begin{cases}(x-\pi)^2 & 0\le x<\pi \\ \sin x & \pi\le x\le \dfrac{3}{2}\pi\end{cases}$

六、初等函数

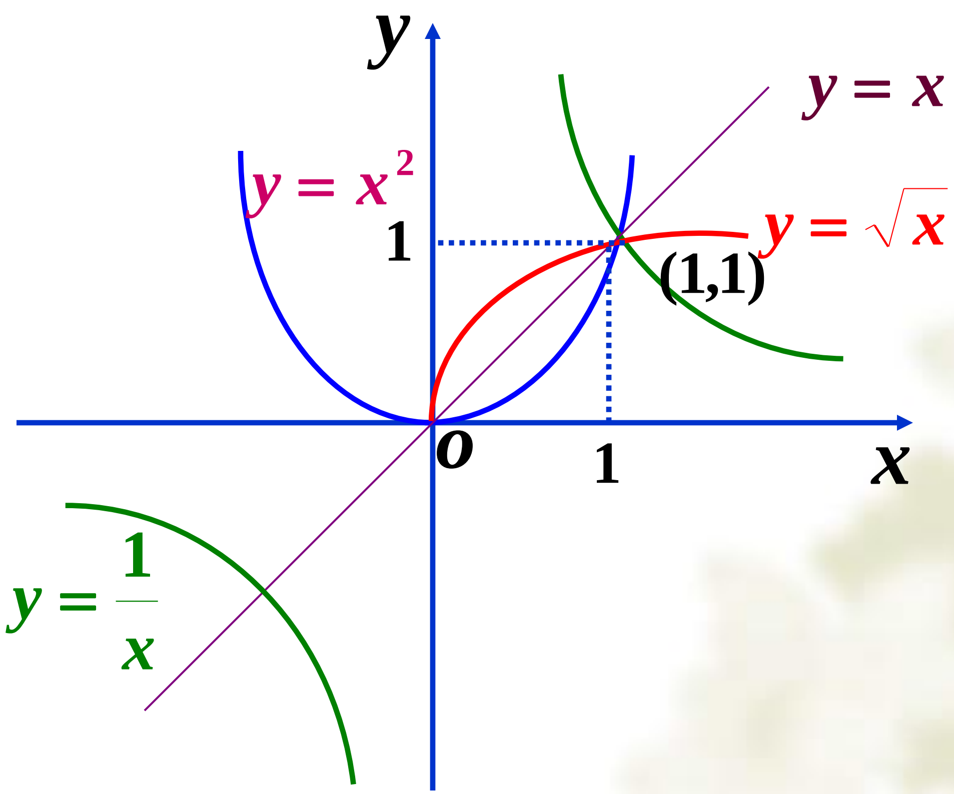
（一）基本初等函数

1、常数函数

$$f(x)=C \quad \text{为常数} \qquad D_f:(-\infty,+\infty)$$

2、幂函数

$y = x^{\mu}$　　μ 是常数

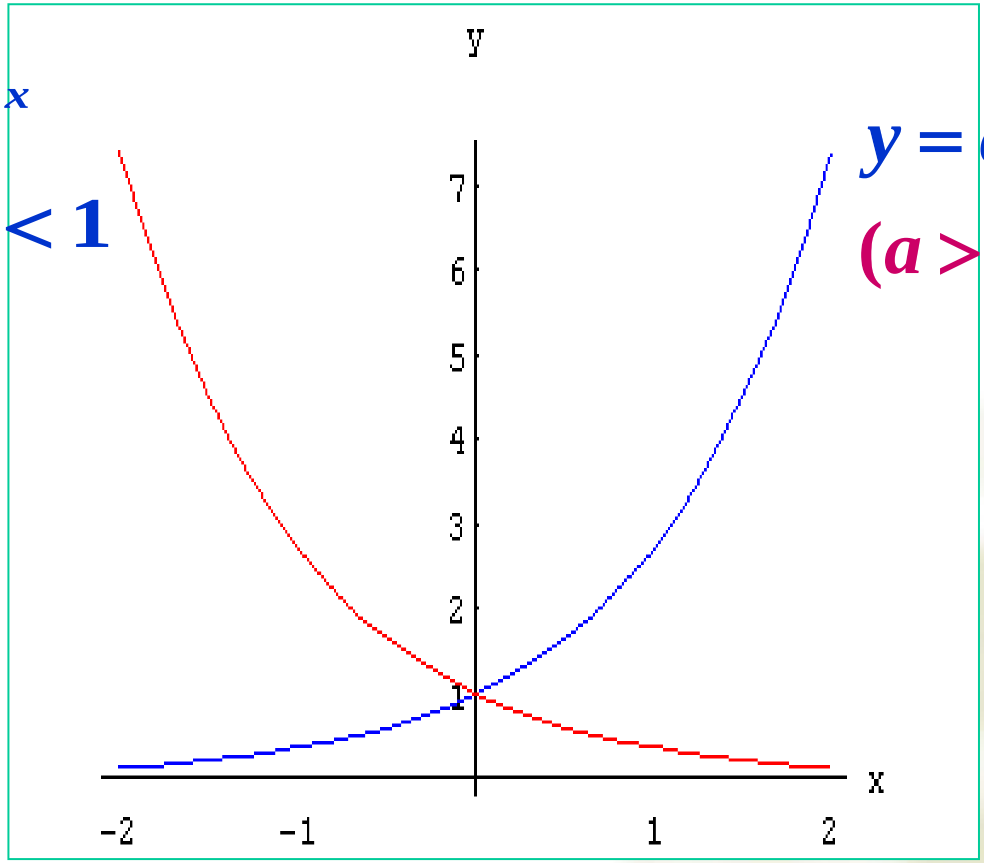


3、指数函数

$$f(x)=a^x \quad (a>0, a\neq 1) \quad D_f:(-\infty,+\infty)$$

$y=a^x$

$0<a<1$

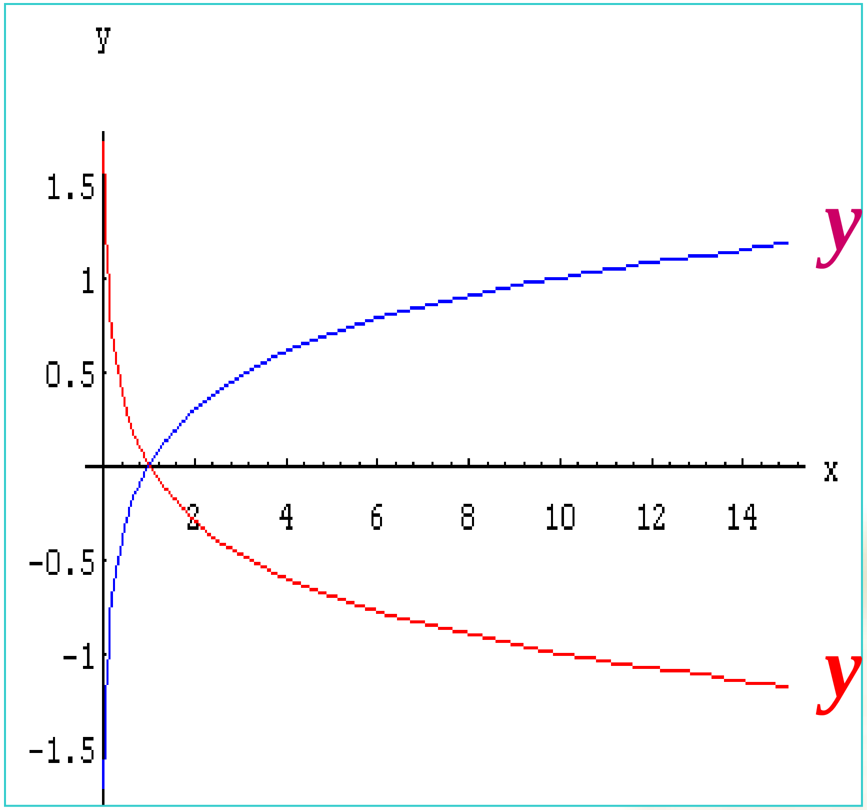


$y=a^x$

$(a>1)$

4. 对数函数

$$f(x)=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1) \quad D_f:(0,+\infty)$$



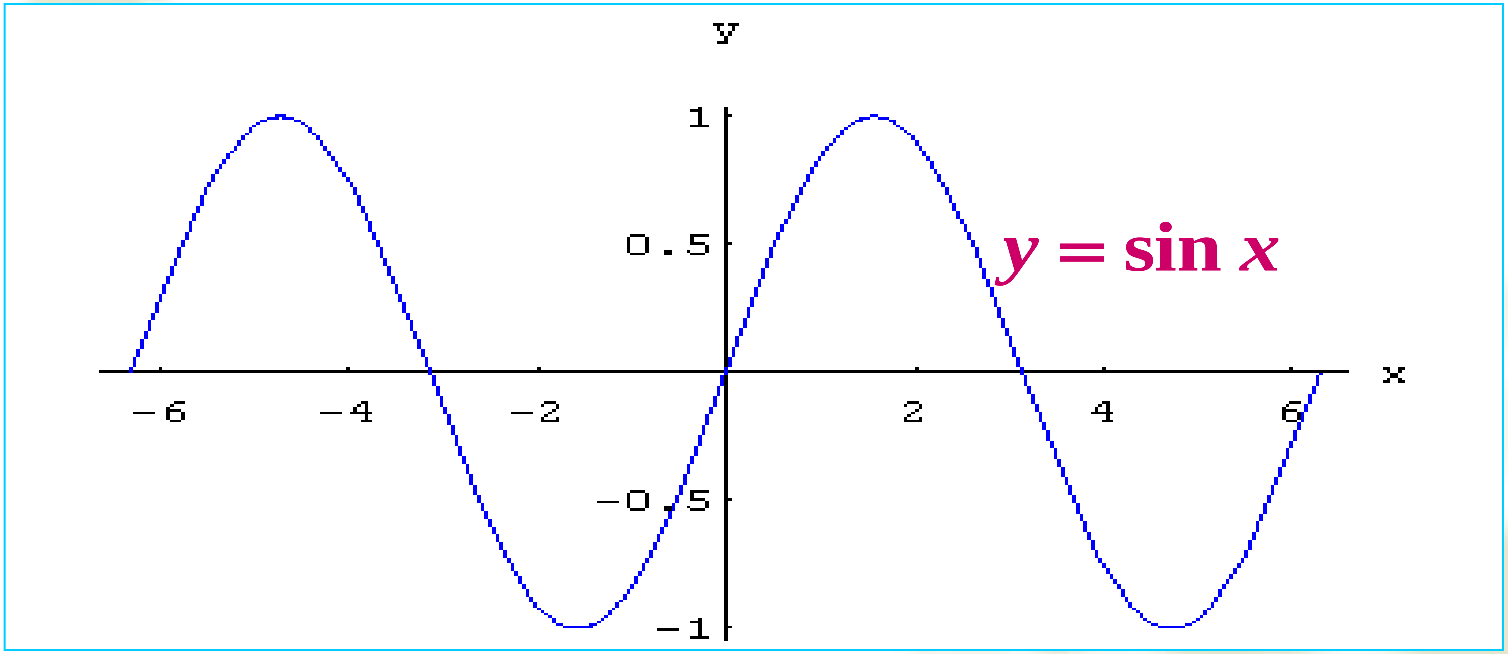
$y=\log_a x$

$(a>1)$

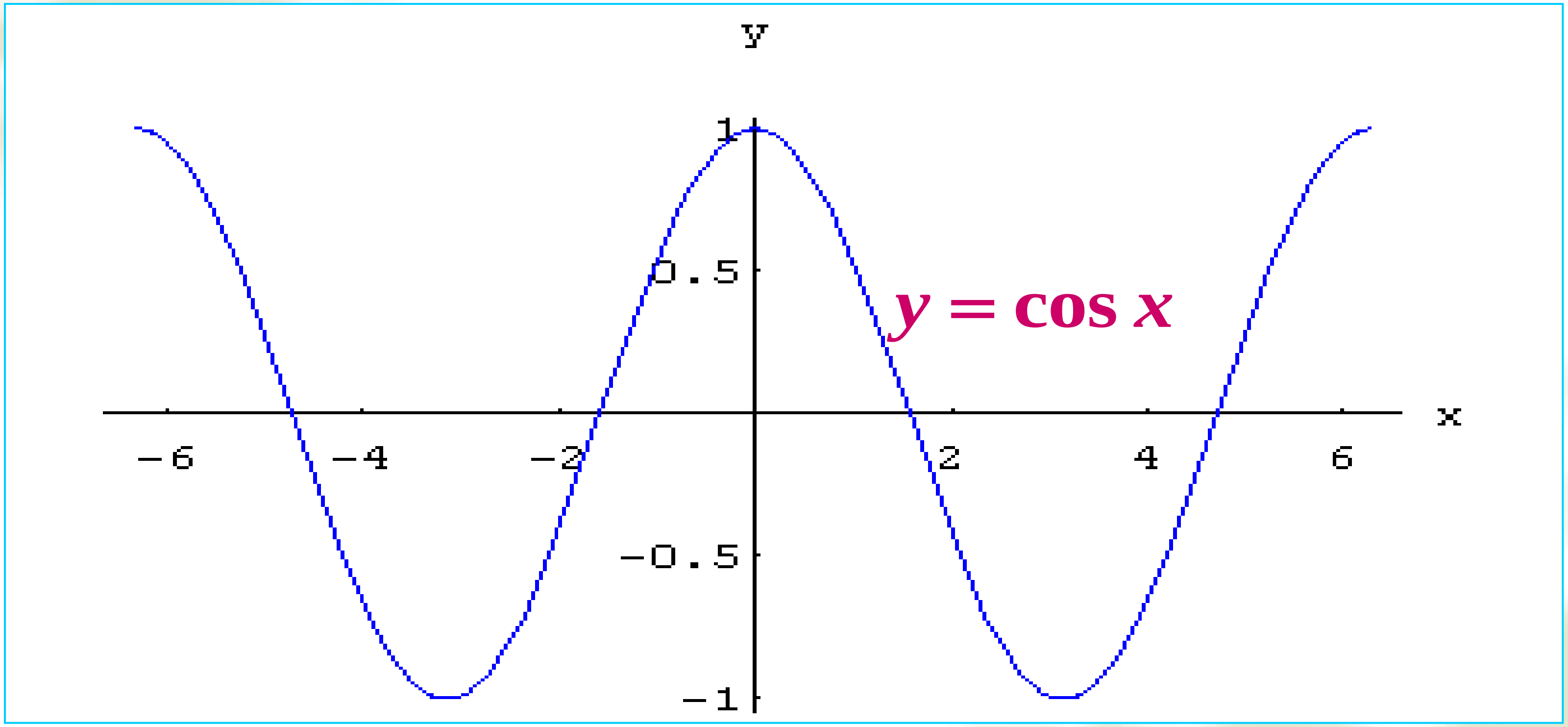
$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

5、三角函数

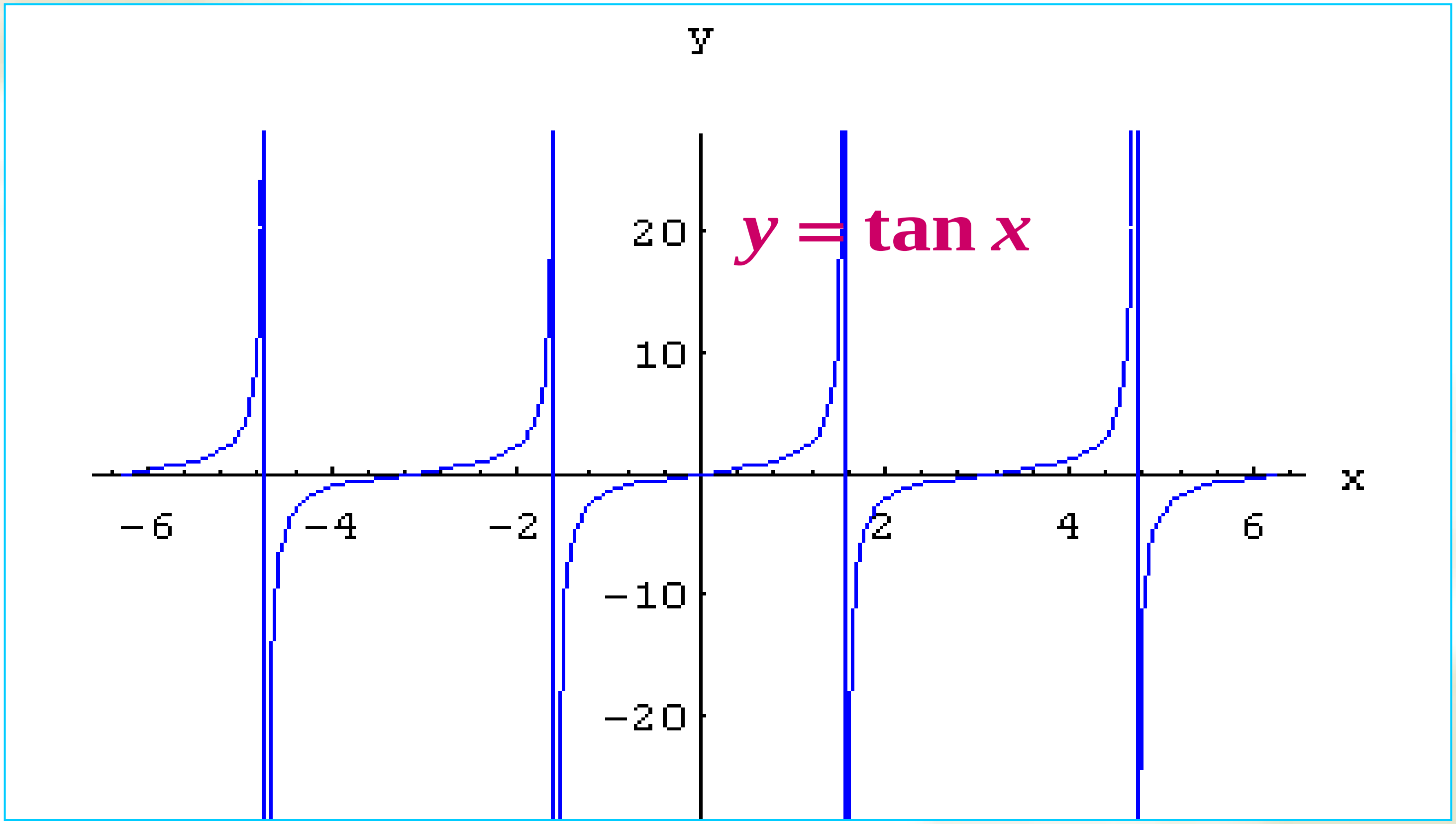
(1) $y = \sin x$



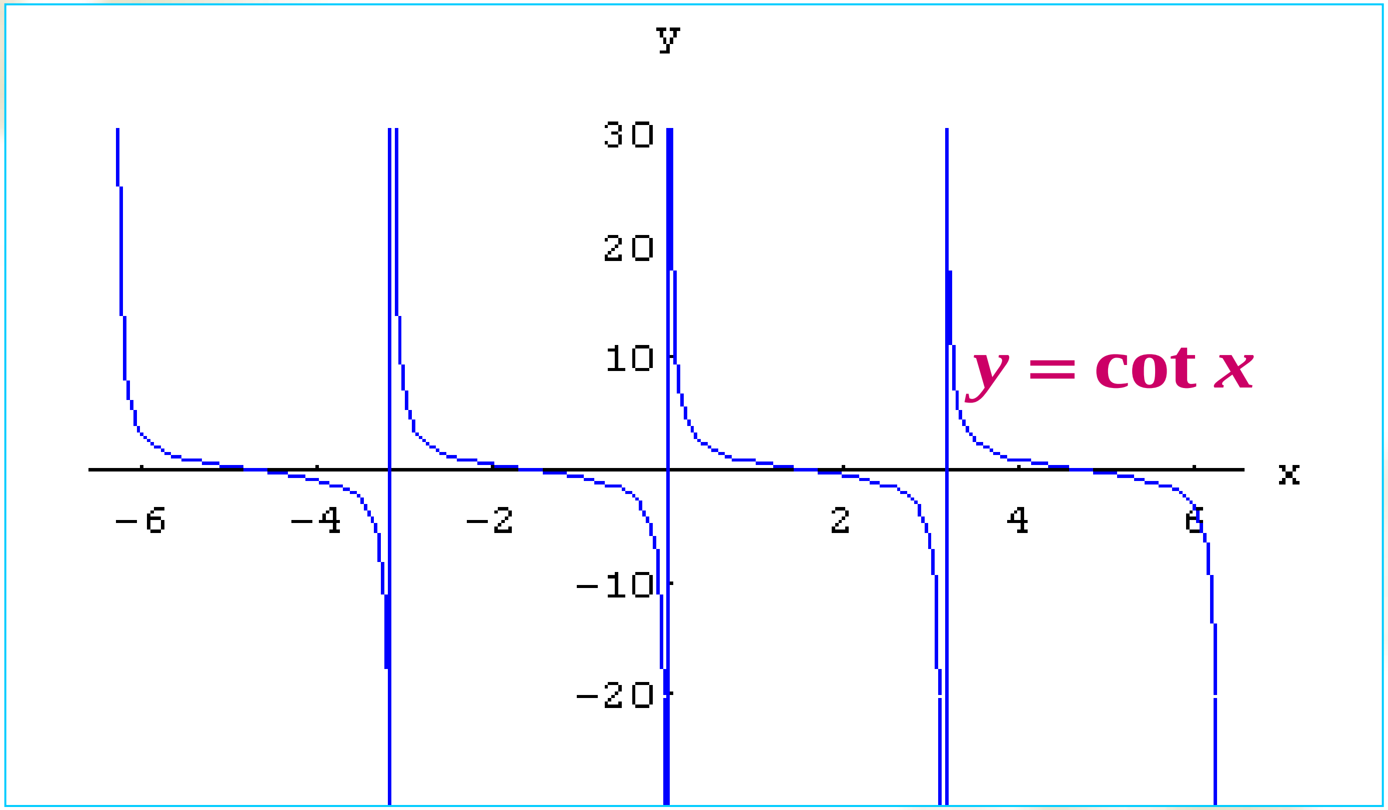
(2) $y = \cos x$



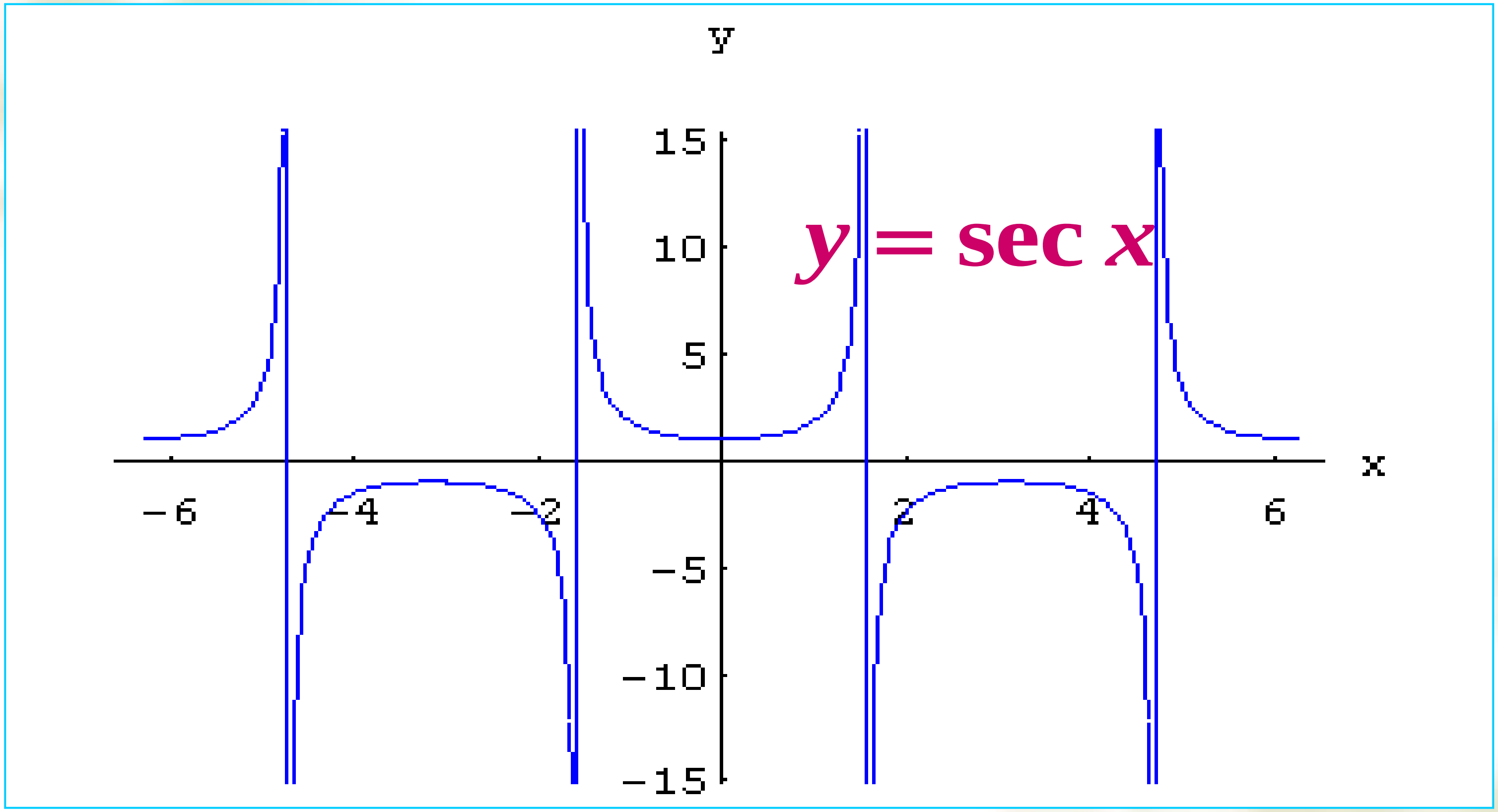
(3) $y = \tan x$



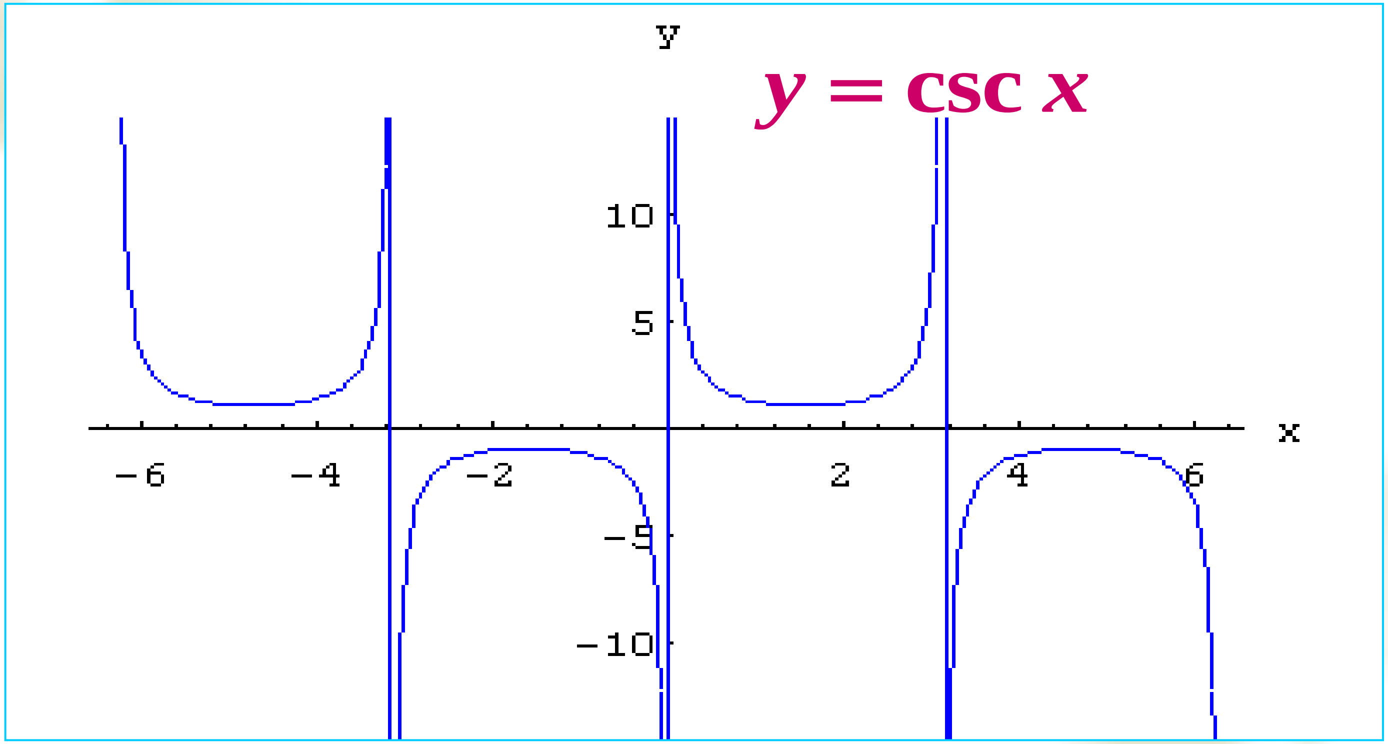
(4) $y = \cot x$



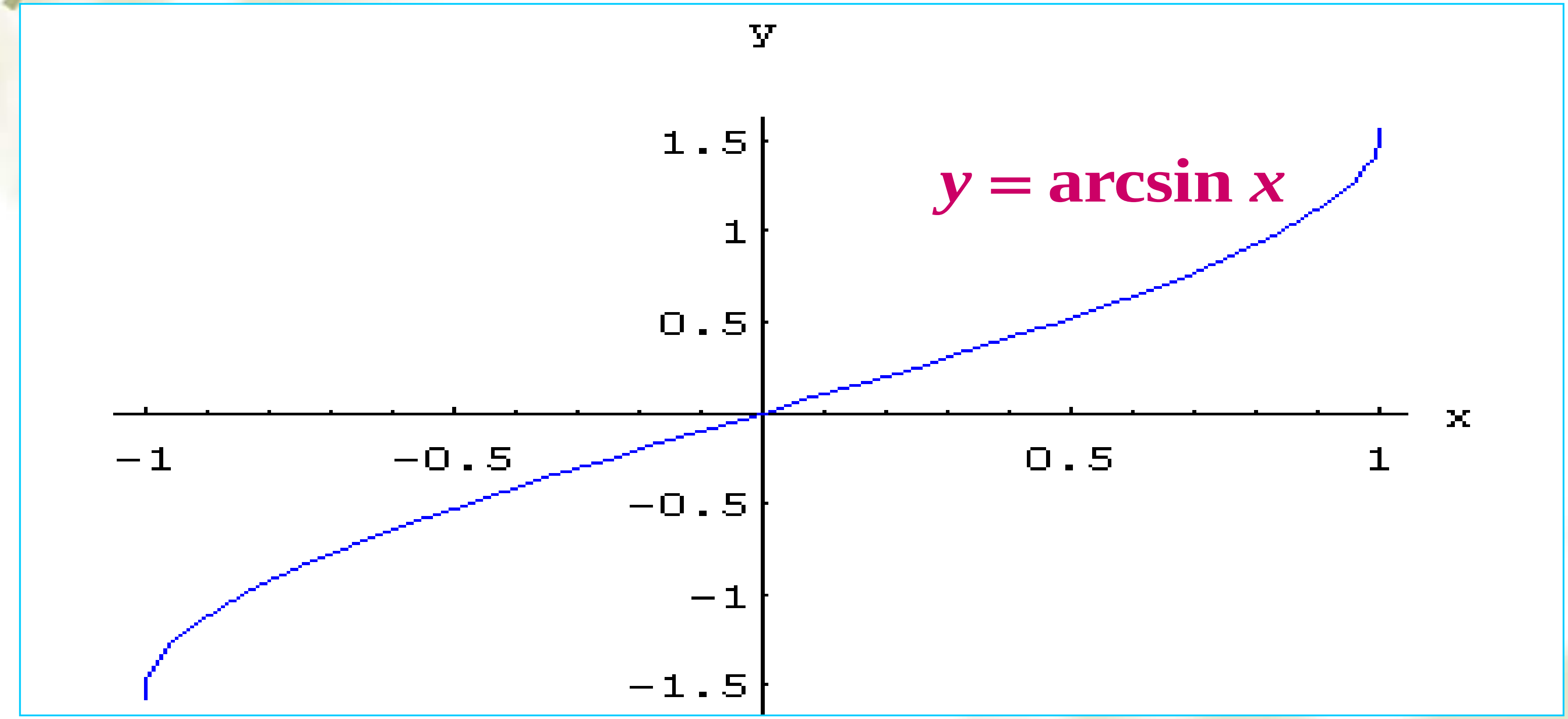
(5) $y = \sec x$



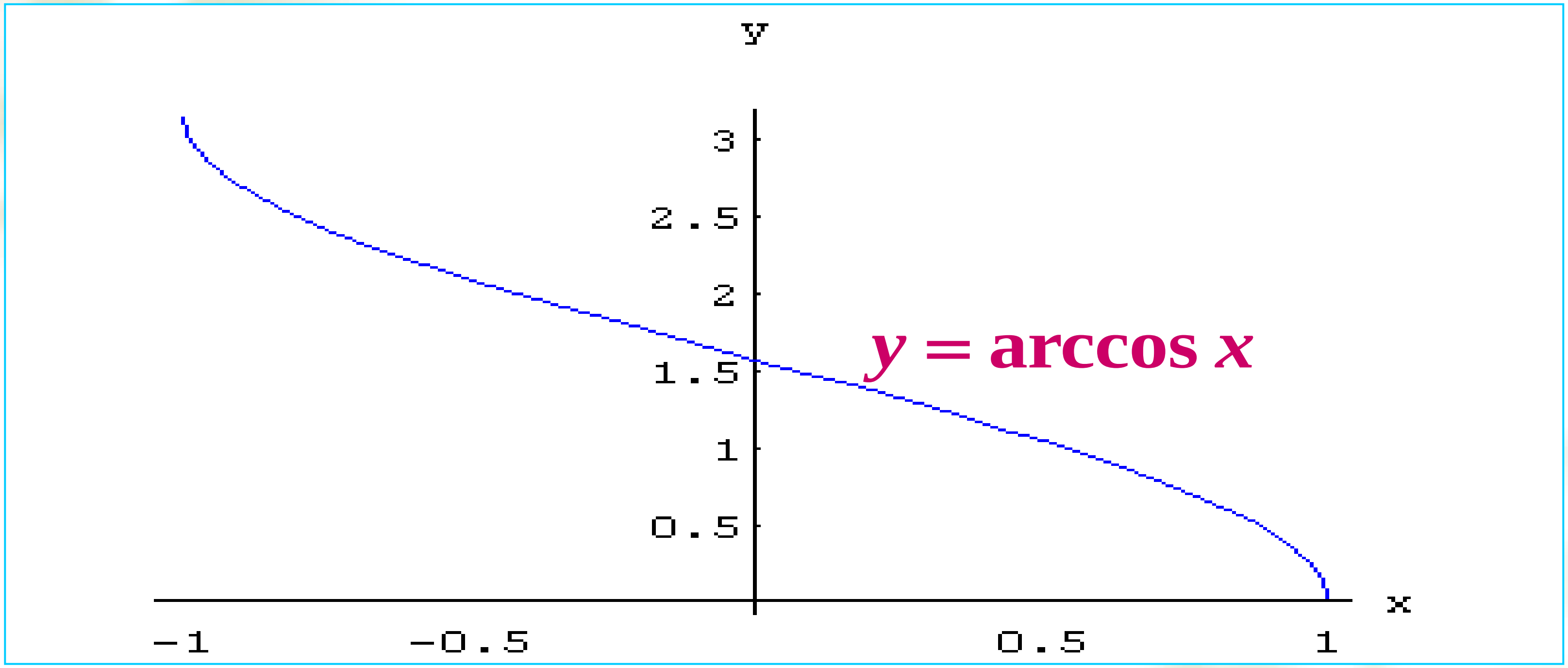
(6) $y = \csc x$



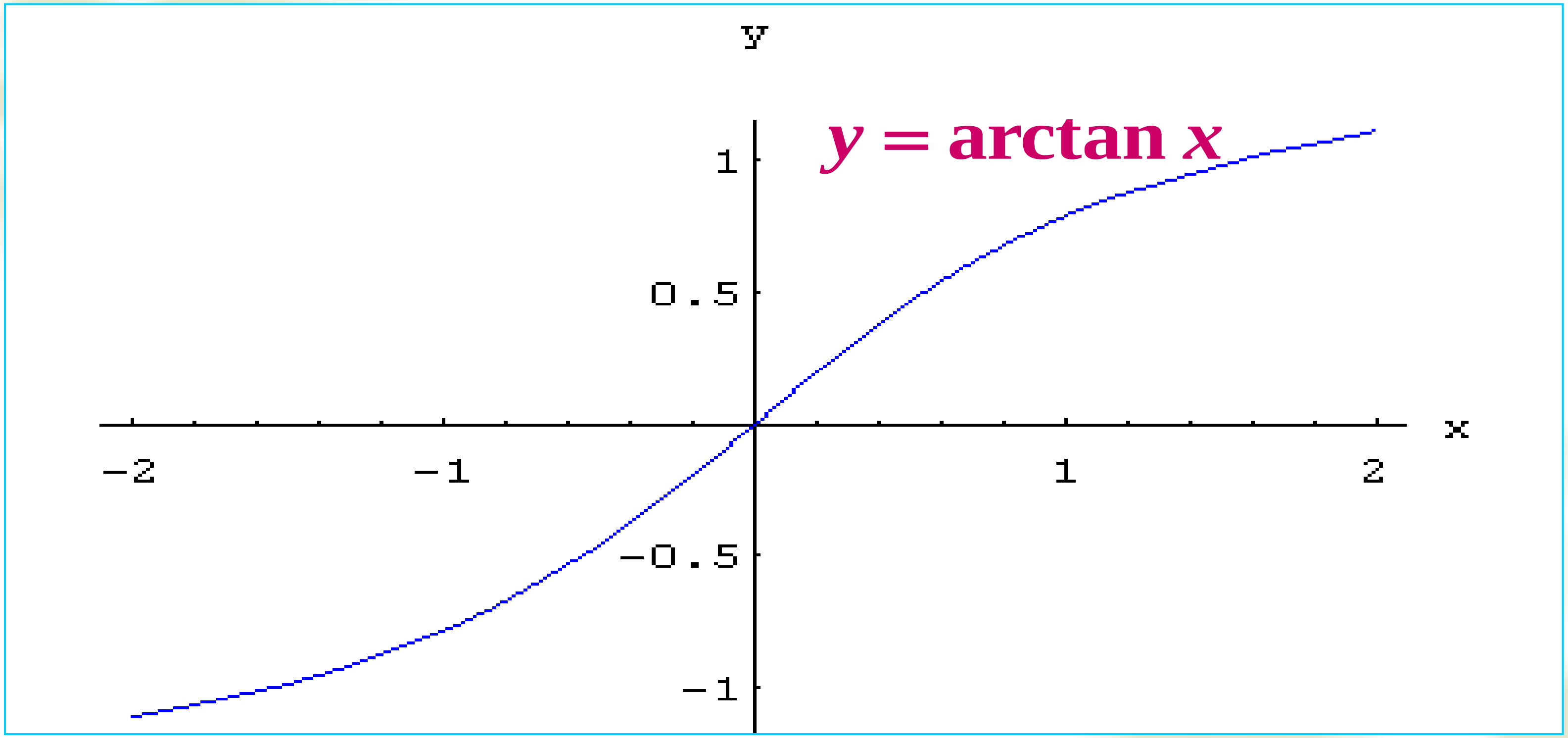
(7) $y = \arcsin x$



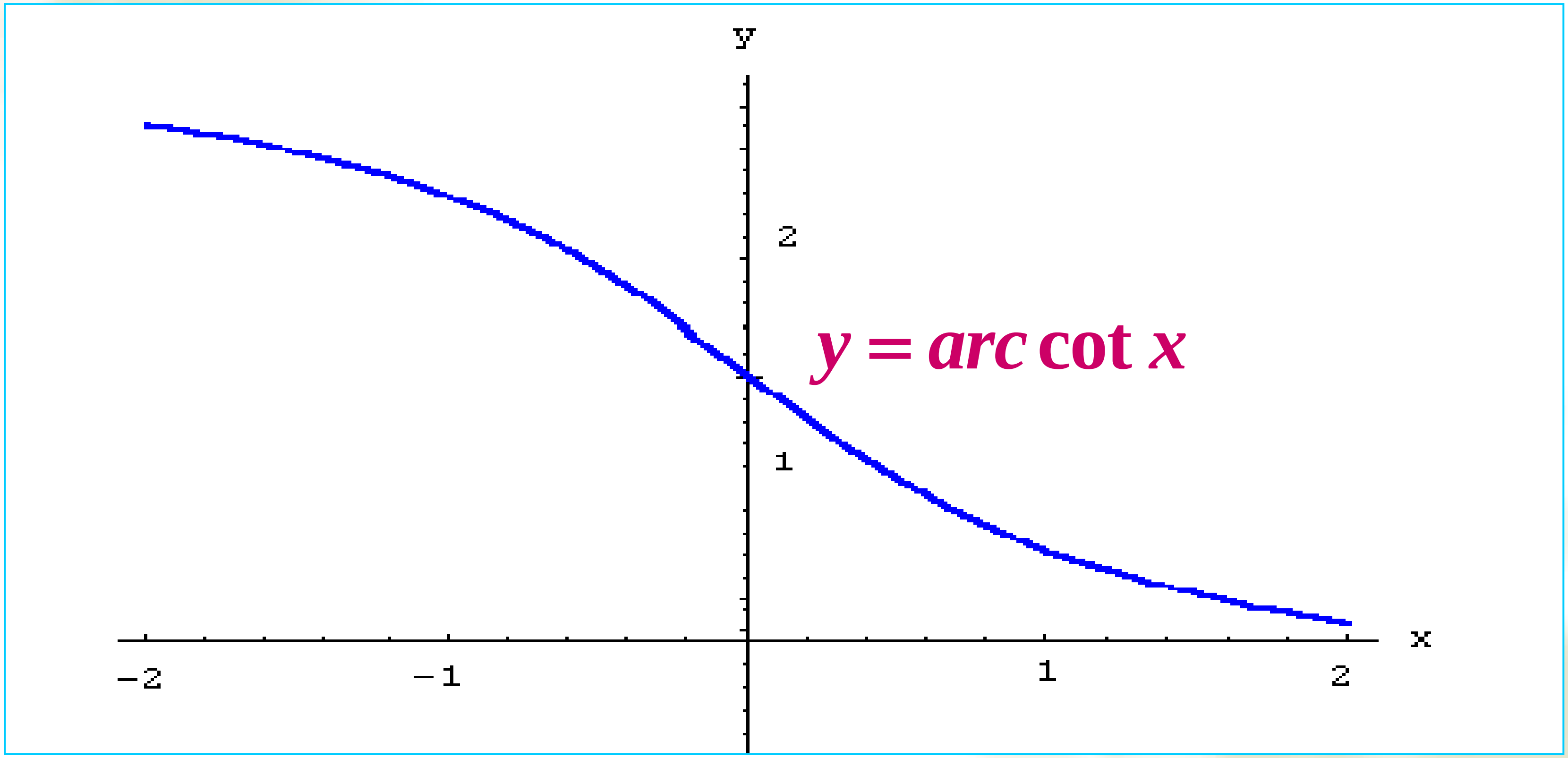
(8) $y = \arccos x$



(9) $y = \arctan x$



(10) $y = arc\cot x$



(二) 初等函数

由基本初等函数经过有限次代数运算和复合所构成的函数，并可用同一个解析式表示的函数。其定义域为使相应的解析式有意义的自变量的取值范围。

七、几个常用公式

1、三角不等式

对于任意实数 a 和 b，都有

$$||a|-|b|| \le |a+b| \le |a|+|b|.$$

2、平均值不等式

对任意 n 个正数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$