§8 函数方程的近似求解

一、数值方法

1、求方程的解主要方法有两种：

解析方法和数值方法。

数值方法是一种求近似解的方法。是设法构造一个可实际计算的过程，并通过运行这个过程产生方程的精确解的一系列近似值。这些近似值（精度较高）理论上将收敛（在一定的条件下）于方程的精确解，称其为数值解或近似解。

数值方法是用数学工具解决实际问题过程中的一个重要过程。

2、迭代法

数值计算中常用的求近似值的方法是迭代法。

$f(x)=0$ 化为等价形式 $x=F(x)$

即 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的解，则成立

$$x^*=F(x^*),$$

反之亦然。 $F(x)$ 称为迭代函数。

取初始值 x_0， 按

$$x_{k+1}=F(x_k) \quad k=0,1,2,\cdots$$

产生序列 $\{x_k\}$（设每个 x_k 都属于 $F(x)$ 的定义域），上述的计算过程称为迭代。

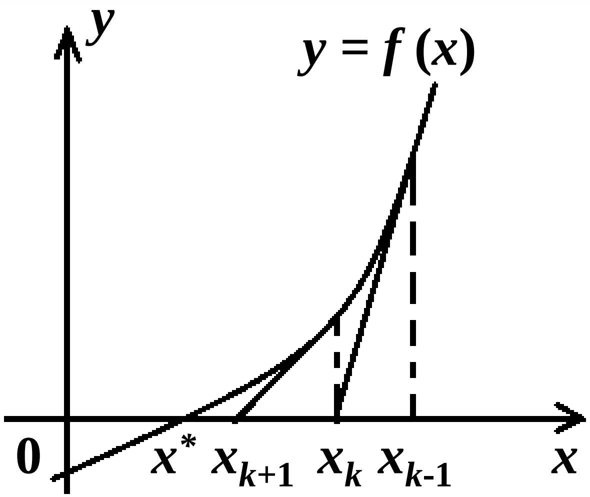
3、Newton 迭代法

求函数方程 $f(x)=0$ 的解：

是求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标 x_k，

若曲线在 $x=x_k$ 处的切线方程为

$$y-f(x_k)=f'(x_k)(x-x_k)$$



与 x 轴的交点的横坐标为

$$x=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_{k+1}$$

即 **Newton 迭代法**实质上是通过一系列的切线与 x 轴的交点的横坐标，来逼近曲线与 x 轴的交点的横坐标，所以又称为 **Newton 切线法**。

定理： 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中有二阶连续导数，且满足

(1) $f(x)\cdot f(b) < 0$;

(2) $f'(x)$ 在(a, b) 保号 ;

(3) $f''(x)$ 在(a, b) 保号 ;

又设x_0 是 a 和 b 中满足

$$f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$$

的点，则以 x_0 为初值的 Newton 迭代过程

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

产生序列 $\{x_k\}$单调收敛于方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 中的唯一解。

例：解方程 $\ln x = \sin x$.

解：记 $f(x) = \ln x - \sin x$ ， 考虑区间 $[\frac{\pi}{2}, e]$ ，

则有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} < 0$， $f(e) = \ln e - \sin e > 0$，

而 $f'(x) = \frac{1}{x} - \cos x > 0 \quad x \in [\frac{\pi}{2}, e]$,

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \sin x > \sin e - \frac{4}{\pi^2} > 0 \quad x \in [\frac{\pi}{2}, e],$$

所以符合定理的全部条件;

因为 $f(e)f''(e) > 0$,

所以初值取为 $x_0 = e$, 利用

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0,1,2,\cdots$$

计算结果如下：

k	x_k	$\lvert x_k - x^* \rvert$
1	2.257 815 620 636 622 89	3.87×10^{-2}
2	2.219 512 490 173 004 78	4.05×10^{-4}
3	2.219 107 195 173 873 23	4.63×10^{-8}
4	2.219 107 148 913 746 83	8.88×10^{-16}

取 $\tilde{x} = x_4 = 2.219\,107\,148\,913\,746\,83$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的 x^* 的近似解。

说明：

1、Newton 迭代法是求解函数方程最基本和最重要的方程之一，它可推广到若干个方程构成的方程组的求解上去，在理论研究上有着重要的意义。同时，在实际求解方程中，它常常又是首选的方程。由于迭代函数比较简单，除了一些导函数特别复杂的情况外，每做一步迭代所化的运算量是比较小的，当初值选得好时收敛速度相当快，编程也比较容易。

2、当函数 $f(x)$ 的导函数不太容易计算时，可以用

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$ 近似代替 $f'(x_k)$，

这时的迭代公式为

$$\begin{cases} \text{取初值 } x_0, x_1, \\ x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

其几何意义是用过 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ 和 $(x_k, f(x_k))$ 的割线代替过$(x_k, f(x_k))$ 切线，将这条割线与 x 轴的交点的横坐标作为新的近似值 x_{k+1}，这种方法叫**割线法**或**弦割法**。