§4 连续函数

* 现实世界中”连续不断”的现象在数学上的反映，就是函数的连续性。
* 函数连续的直观意义：当自变量在某点处有微小变化时，函数也在此点处有微小的变化。
* 微积分讨论的对象主要是连续函数或只有个别间断点的函数。

一、函数在一点的连续性

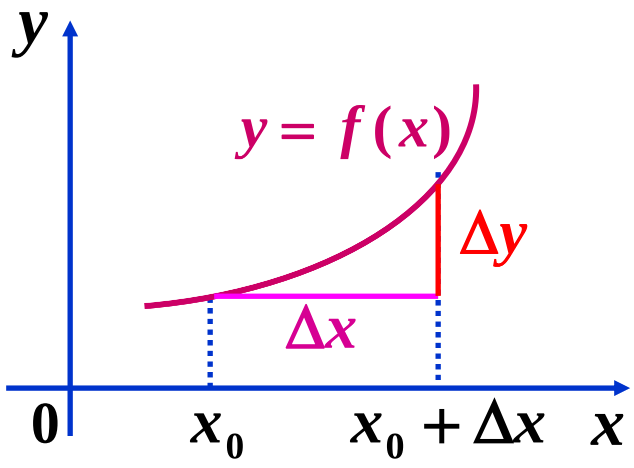
1、函数的增量

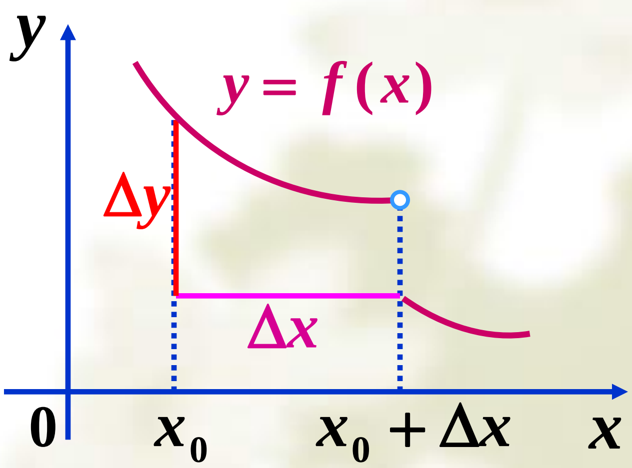
设函数 f 在 $U(x_0,\delta)$ 有定义，$\forall\ x \in U_\delta(x_0)$,

设 $\Delta x = x - x_0$ ，称为自变量在点 x_0 的增量，

而 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量。





2、定义

1）设函数 f 在 $U(x_0,\delta)$有定义，$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$

则称函数 f 在 x_0处连续，或称x_0是 f 的连续点。

$\Leftrightarrow$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ 3) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0,$ 当$|x - x_0| < \delta$时 $(x\in U(x_0,\delta))$

$\ni |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ 4) $\forall\{x_n\}\begin{cases} x_n \in U(x_0,\delta) \\ x_n \to x_0 (n\to\infty) \end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

例1、证明 $f(x)=a^x\ (a>1)$ 在 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$ 连续

证：即证 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall x\in U(x_0,\delta)\ \ni\left|a^x-a^{x_0}\right|<\varepsilon$

$$\left|a^x-a^{x_0}\right|=a^{x_0}\left|a^{x-x_0}-1\right| \quad \because \lim_{x'\to 0}a^{x'}=1,\ a^0=1$$

由连续的等价定义得

$$\forall\varepsilon'>0,\exists\delta>0,\ \forall x'\in U(0,\delta)\ \ni\left|a^{x'}-1\right|<\varepsilon'$$

$x'\to 0$, 即 $x\to x_0$ $\forall x\in U(x_0,\delta)\ni\left|a^{x-x_0}-1\right|<\varepsilon$

$\therefore$ 对于 $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}>0\quad \exists\delta>0\ \ni\left|a^{x-x_0}-1\right|<\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}$

$$\therefore\left|a^x-a^{x_0}\right|=a^{x_0}\left|a^{x-x_0}-1\right|<a^{x_0}\varepsilon'=a^{x_0}\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}=\varepsilon$$

$$\forall x\in U(x_0,\delta)$$

$\therefore f(x)=a^x\ (a>1)$ 在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 连续。

3、性质

1）如果函数 f 和 g 在 x_0 处连续，

则两个函数的

和 $f+g$

差 $f-g$

积 $f\,g$

商 f/g $\quad (g(x_0)\neq 0)$

在 x_0 处连续，

证：$\because f$、$g\in C_{(x_0)}$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$=f(x_0)\pm g(x_0)$$

$\therefore$ $f\pm g$在x_0处连续，同理可证积商。

例2、设 $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$，其中$P_n(x)$和 $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式，且 $Q_m(x_0)\neq 0$，

解：对于常数函数 $f(x)=C$ 与 函数 $g(x)=x$，容易从定义证明其连续性，然后由连续的四则运算法则可以得到：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}=f(x_0)$$

$\therefore f$ 在 x_0 处连续。

2）设有函数 f 和 g，$x_0 \in D_g$　$u_0 = g(x_0) \in D_f$

如果g 在 x_0 连续，f 在 u_0 连续，

则 $f \circ g$ 在 x_0 处连续。

证：$\because u = g(x) \in C_{(x_0)}$　$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$

即 $\lim\limits_{x \to x_0} u = u_0$

又 $\because y = f(u)$在$u_0 = g(x_0)$处连续

$$\therefore \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$$

$$= f[g(x_0)] = f \circ g(x_0)$$

则 $f \circ g$ 在 x_0 处连续。

二、函数的间断点

函数 f 在 x_0 连续的三个条件：

1）$f(x)$ 在 $x = x_0$ 有定义

2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在（有限）

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

缺一不可

1、间断点的定义

函数 f 在 x_0 连续的三个条件中有一个不满足，则称函数 f 在 $x = x_0$ 处不连续即间断，并称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点（不连续点）.

间断点有第一类、第二类间断点。

2、第一类间断点

1）可去间断点 $x_0 \overset{\text{定义}}{\equiv} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0) \text{ or } f(x_0) \text{ 无意义。}$$

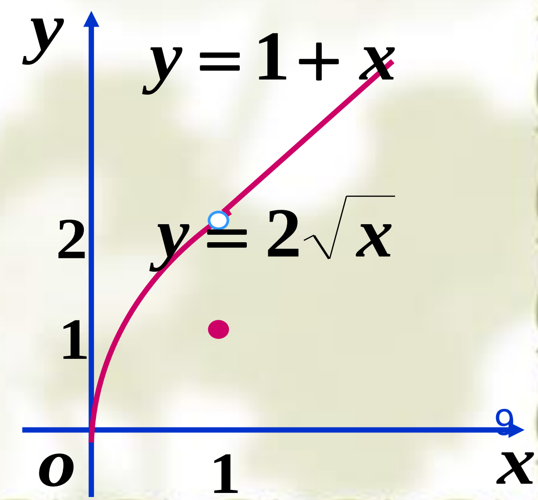
例3、讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \\ 1+x & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性。

解：$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2\sqrt{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1+x) = 2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$



而 $f(1)=1$ $\quad\therefore \lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

$\therefore f(x)$在 $x=1$ 处不连续，为可去间断点。

注意 可去间断点可对间断点补充或调整使之连续。

若 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，可构造

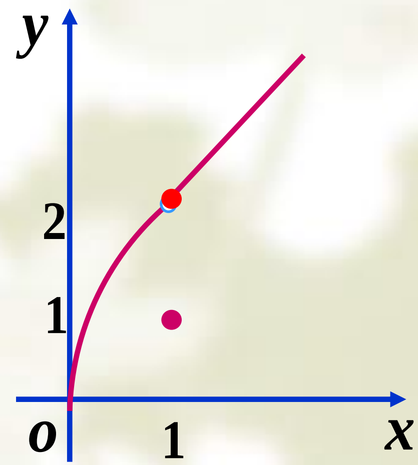
$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & x=x_0 \end{cases}$$

$F(x)$ 在 $x=x_0$ 连续。

如上例，令 $f(1)=2$

则 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\le x<1 \\ 1+x & x\ge 1 \end{cases}$

在 $x=1$ 处连续。



2）跳跃间断点 $x_0 \overset{定义}{\equiv} \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在，

但 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

例4、$f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处不连续。

解：$\because \lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

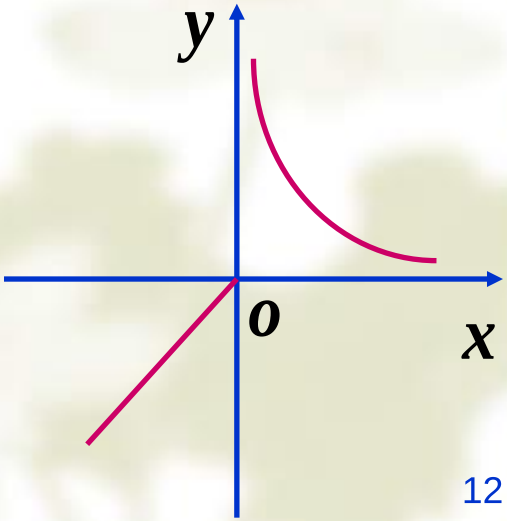
$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \arctan\dfrac{1}{x}$ 不存在，

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

3、第二类间断点

1）无穷间断点 $x_0 \overset{\text{定义}}{\equiv}$ 当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的左右极限至少有一个无限地增大。

例5、讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x>0, \\ x & x\le 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。



解：$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

$\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点。

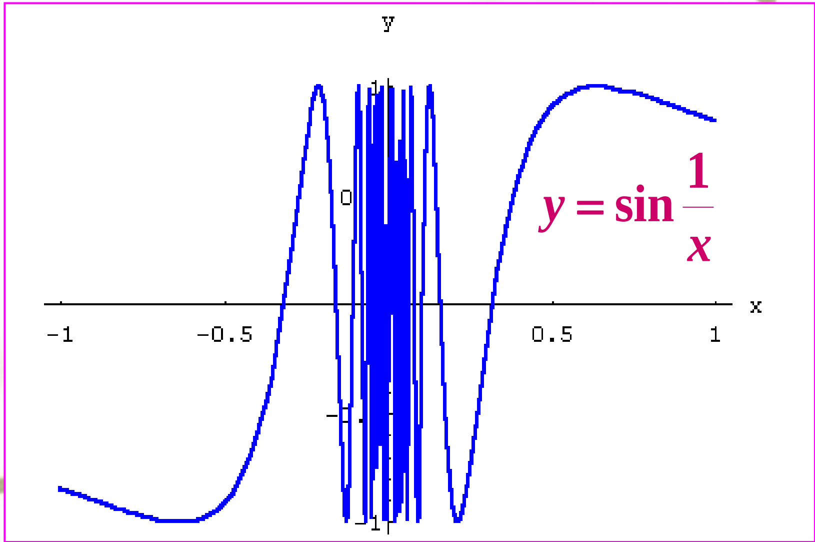
2）振荡间断点

例6、讨论 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

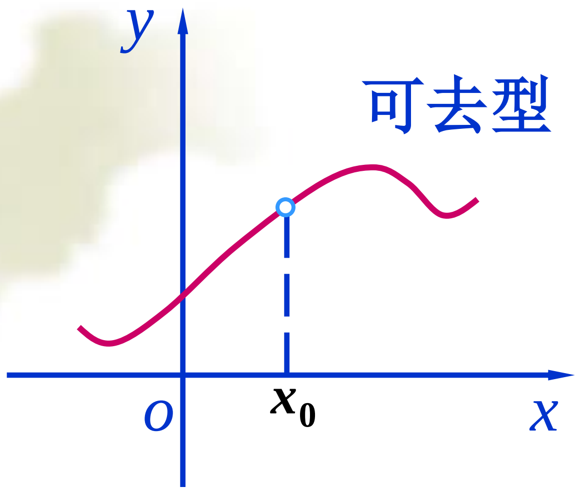
解：$\because$ 在 $x=0$ 处无定义，

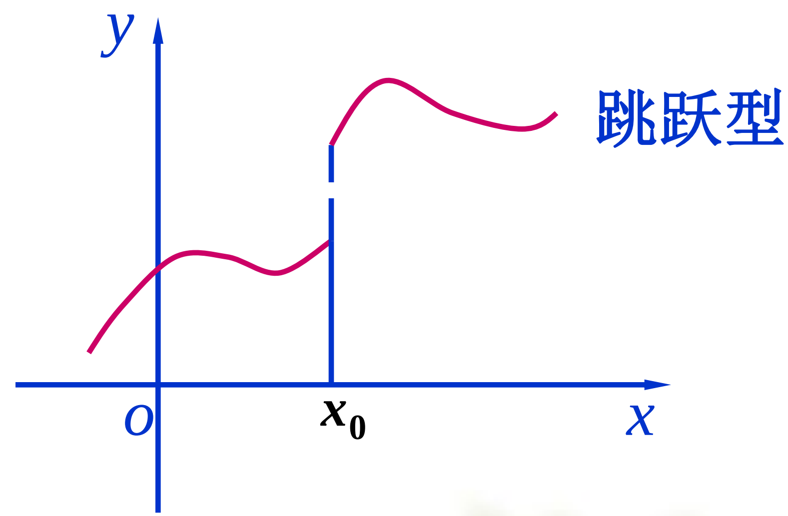
且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，

$\therefore$ $x=0$ 为第二类振荡间断点。

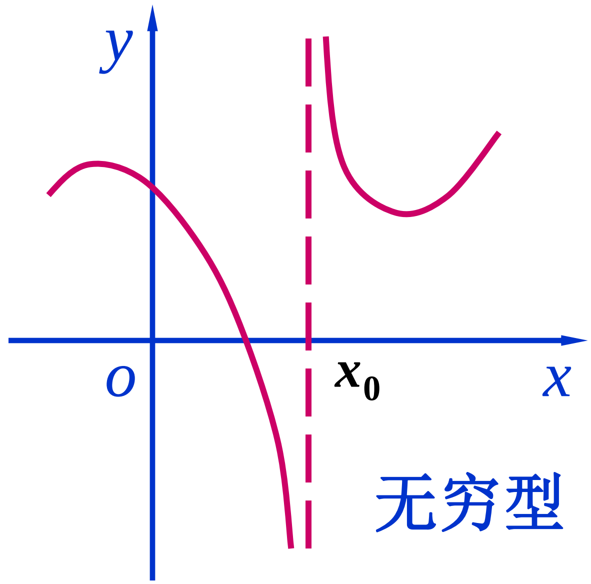


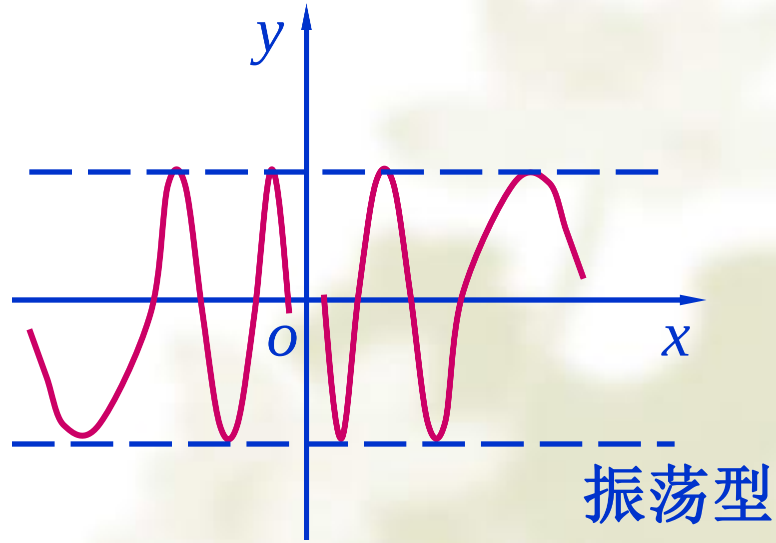
第一类间断点





第二类间断点





例7、求$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-a}$的间断点（$a$为常数）

解：$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-a}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-a}$

1）当$a\neq 1,-3$ 时，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

$\therefore\ x = a$ 是无穷间断点；

2）当$a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=4$$

$\therefore\ x = a = 1$ 是 可去间断点；

3）当$a=-3$时，$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+3)}{x+3}=-4$$

$\therefore\ x = a = -3$ 是可去间断点。

三. 区间上的连续函数

1、定义 $f(x)$ 在 x_0 左（右）连续，

$$\overset{\text{定义}}{\equiv} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in U_-(x_0,\delta)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in U_+(x_0,\delta)$$

定理： $f(x)$ 在 x_0 连续

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 既左连续又右连续。

2、定义区间上的连续函数

1） $f(x)$ 在 (a, b) 连续

$\overset{定义}{\equiv}$ $f(x)$ 在 $\forall x_0 \in (a, b)$ 处连续。

2） $f(x)$ 在 $[a, b]$上连续

$\overset{定义}{\equiv}$ $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，

且 在 $x = a$ 是右连续 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

在 $x = b$ 是左连续 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

连续函数的图形是一条连续不间断的曲线。

定理: 一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\downarrow$

一切初等函数

函数在某点连续的所有性质同样适合于函数在区间上的连续。

例8、求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} In(\sin x+1)$

例9、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{In(1+x)}{x}$

一般地，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$，而函数 $f(x)$ 在 $u=a$ 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f\left[g(x)\right]=\lim_{u\to a} f(u) = f(a) = f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]$$

四. 闭区间上连续函数的性质

1、有界性定理

设 $f(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow f(x)$ 在$[a, b]$ 上有界

即$\exists M > 0, \ \forall x \in [a, b], \ \ni |f(x)| \leq M$

开区间上的连续函数呢?

2、最大最小值定理

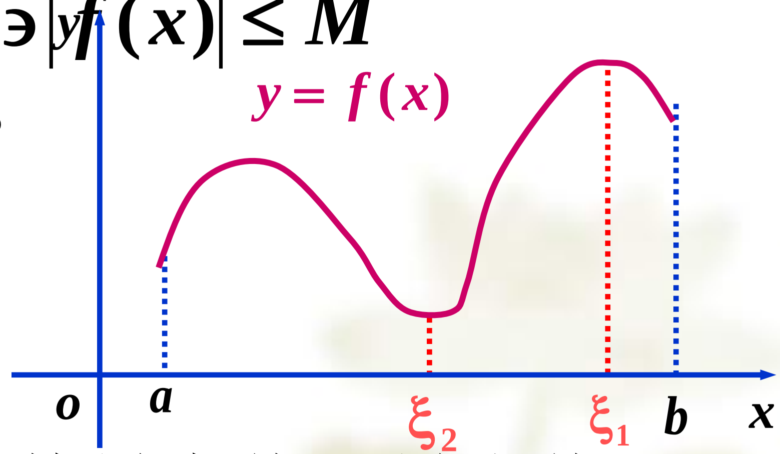
设 $f(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow$

$f(x)$ 在$[a, b]$ 上必能取到其最大值和最小值,

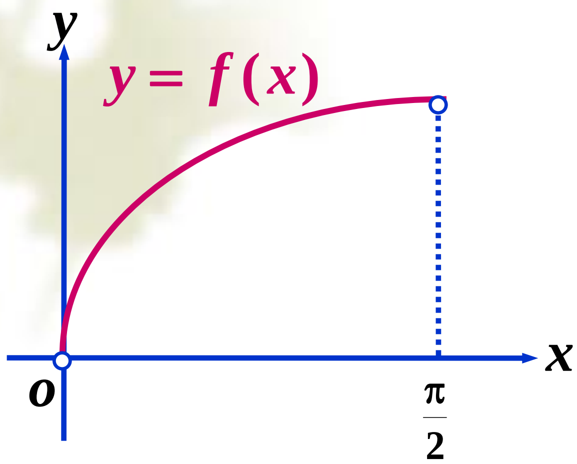
即必 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b], \ \ni f(\xi_2) \leq f(x) \leq f(\xi_1)$

$f(\xi_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

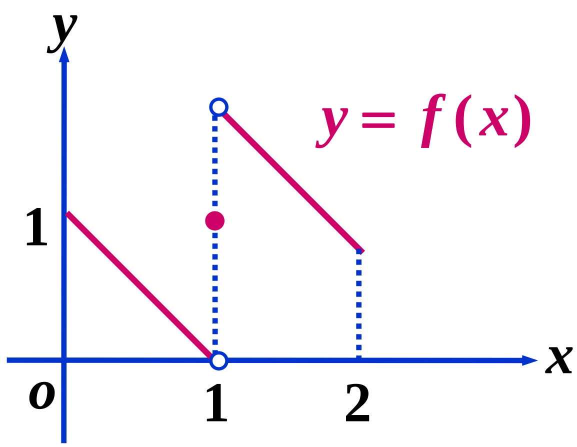
$f(\xi_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$



开区间上的连续函数呢?



在闭区间上有有限个间断点呢?



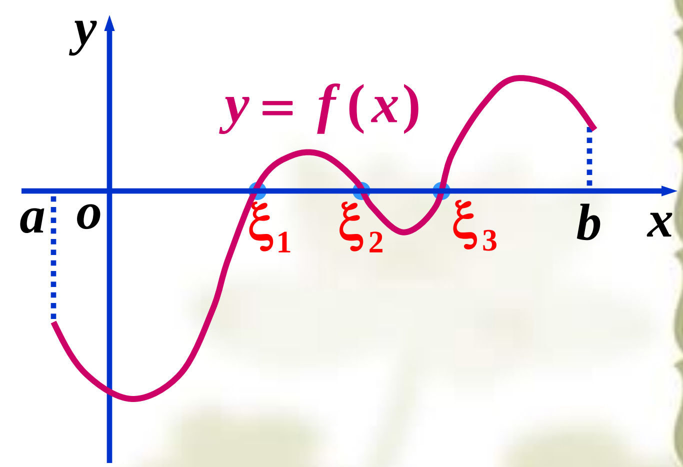
3、零点存在定理

设 $f(x) \in C_{[a,b]}$ 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ 至少 $\exists$ 一点 $\xi \in (a,b)$， $\ni f(\xi) = 0$

几何解释

连续曲线 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的两侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点。



例10、证明 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $(1, 2)$ 内有一个实根，并求出其近似值，使误差不超过 10^{-1}.

例11、试证实系数三次方程必有实根。

4、介值定理

设 $f(x) \in C_{[a,b]}$ $\quad m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$

$$M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

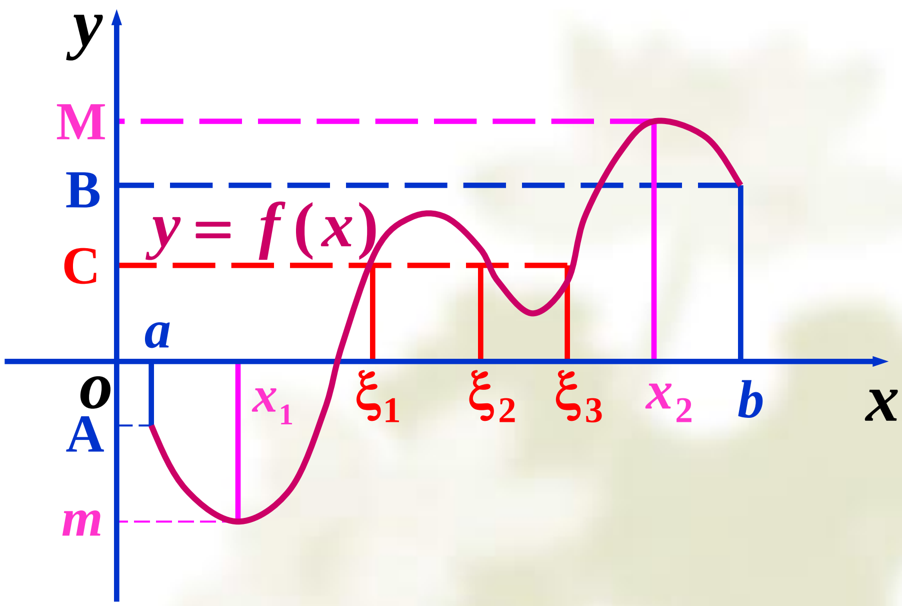
则对 $\forall\ c \in (m, M)$, 至少 $\exists\ \xi \in (a,b)\ \ni f(\xi) = c$

几何解释

连续曲线 $y = f(x)$

与水平直线 $y = C$

至少有一个交点。



证：由最值定理，$\exists\ \eta_1, \eta_2 \in [a, b]$,

$\ni f(\eta_1) = m, \quad f(\eta_2) = M$;

不妨设 $\eta_1 < \eta_2$， 对 $\forall c \in (m, M)$,

作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - c$

$\therefore \varphi(x) \in C_{[\eta_1, \eta_2]}$,

且 $\varphi(\eta_1) = f(\eta_1) - c < 0, \varphi(\eta_2) = f(\eta_2) - c > 0$,

由零点存在定理，至少$\exists$ 一点 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$,

$\ni \varphi(\xi) = 0$， 则 $f(\xi) = c$.

五. 无穷小量在极限中的运用

定理： 设在某一变化过程中 $\alpha(x), \beta(x)$ 均为

无穷小量，即 $\lim\alpha(x) = \lim\beta(x) = 0$

1）若 $\lim\limits_{x\to()}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$　　记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$

则称 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量；

2）若 $\lim\limits_{x\to()}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \quad (A \neq 0, A \neq 1)$

记为 $\alpha(x) = O(\beta(x))$

则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 同阶的无穷小量；

3）若 $\lim\limits_{x\to()}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$　　记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 等阶的无穷小量。

例11、计算 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x}$

结论：$1.\ e^{x}-1 \sim x\ (x \to 0)$

$2.\ In(1+x) \sim x\ (x \to 0)$

例12、计算 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

结论： $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

更一般地，$(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x \quad (x \to 0, \alpha \neq 0)$

综上所述： 当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad In(1+x) \sim x, \quad (1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$$

$$(\alpha \neq 0)$$

注意： 等价≠相等

例13、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x\sqrt{x})}{x\sin(3x^2)}$

例14、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin(x^3)}$

例15、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2\tan^2 5x}-1}{x^2}$

例16、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x - x^2}{\arctan 3x}$

例17、计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$

例18、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)}{(1+x)^x-1}$

思考：

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{\sin^2 3x}$

七. 曲线的渐进线

1、定义： 若 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

则称直线 $y = ax+b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线。

2、如何求渐近线

设 $y = ax+b$ 是渐近线

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-(ax+b)}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)}_{a}=0 \quad \text{即 } a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

再由 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 得 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$

$$\therefore\ a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$$

1）当$a=0$ 时， $b=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$y=b$ 是 $y=f(x)$ 的水平渐近线；

2） $y=f(x)$ 的垂直渐近线呢？

（与 x 轴垂直的渐近线）

曲线 $y=f(x)$ 以 $x=x_0$ 为垂直渐近线

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\ (or\ \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty\ or\ \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty)$$

例19、求 $y=x+\arctan x$ 的渐近线

例20、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x(x-1)}$ 的渐近线

六. 极限计算方法的小结

1、代入法

利用函数的连续性、初等函数定义域内的连续。

2、对函数初等变换，然后利用极限的四则运算法则

3、利用两个重要极限

4、利用无穷小量的性质

5、利用等价无穷小替代方法

6、利用左右极限

7、利用 *L'Hospital* 法则求未定型的极限

8、利用夹逼性、单调有界数列必有极限等定理

综合练习

1、求 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

2、求 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}$

3、求 $\lim\limits_{t\to\infty} x\left(\dfrac{t-x}{t+x}\right)^{t}$

4、求 $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(e+x)]^{\cot x}$

5、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}\quad a>0，b>0$.

6、设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{x^{3}}=0$，求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+f(x)}{x^{2}}$.