第十章 常微分方程

常微分方程是数学的一个重要分支，

以微积分为理论基础，运用相当广泛。

如：医学工程学、理论流行病学、生物统计学。

§1 常微分方程的概念

一、问题的提出

细胞的生长：

　　假定一个细胞的质量是 m，在一个理想的环境中生长，它的质量是时间 t 的函数 $m = m(t)$，当 $t = 0$ 时，$m = m_0$，且细胞的生长速度与质量成正比，即 $\frac{dm}{dt} = am$，a 为确定的常数。

上式是一个既含未知函数 $m(t)$，又含未知函数导数 $\frac{dm}{dt}$ 的方程。

用积分的方法求解:

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{m} = a\,dt \\ m(0) = m_0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dm}{m} = \int a\,dt \Rightarrow \ln m = at + C'$$

任意常数

$$\Rightarrow m = e^{at+C'} \quad \Rightarrow m(t) = Ce^{at}$$

当 $t = 0$ 时， $m(0) = m_0$， $\Rightarrow m_0 = C$，

$$\Rightarrow m(t) = m_0 e^{at}$$

二、基本概念

微分方程： 既含有未知函数，又含未知函数导数、微分或偏导数的方程。

常微分方程： 微分方程中的未知函数只是一个自变量的函数的方程。

阶： 微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数。

如： $y' = xy$， $y'' + 2y' - 3y = e^{x}$，

$$(t^2 + x)dt + xdx = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x + y.$$

微分方程的解：

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数。

微分方程的通解：

微分方程的解中含有任意的相互独立的常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同。

即：一阶微分方程的通解中含一个任意常数，$m(t)=Ce^{at}$

二阶微分方程的通解中含二个任意常数，

$\vdots$

n 阶微分方程的通解中含 n 个任意常数。

微分方程的特解：

微分方程的不包含任意常数的解。

奇解： 不在通解中的解。

初始条件： 用来确定任意常数的条件。

n 阶常微分方程的一般形式：

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

如果一个函数 $y = \varphi(x)$ 在区间(a, b)上 n 阶可导，且满足 $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$，

那么，称 $y = \varphi(x)$ 是该方程在区间 (a, b)上的解。

积分曲线 --解的图形

n 阶线性常微分方程：

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

其中 $a_0(x),a_1(x),\cdots,a_n(x)$ 为已知函数，

当 $f(x)=0$ 时，称该方程为齐次线性微分方程，

否则称为非齐次线性微分方程。

当 $a_0(x),a_1(x),\cdots,a_n(x)$ 为常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，

则称 $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$

n 阶常系数线性微分方程。

初值问题： 求微分方程满足初始条件的解的问题。

一阶：$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线；

二阶：$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线。