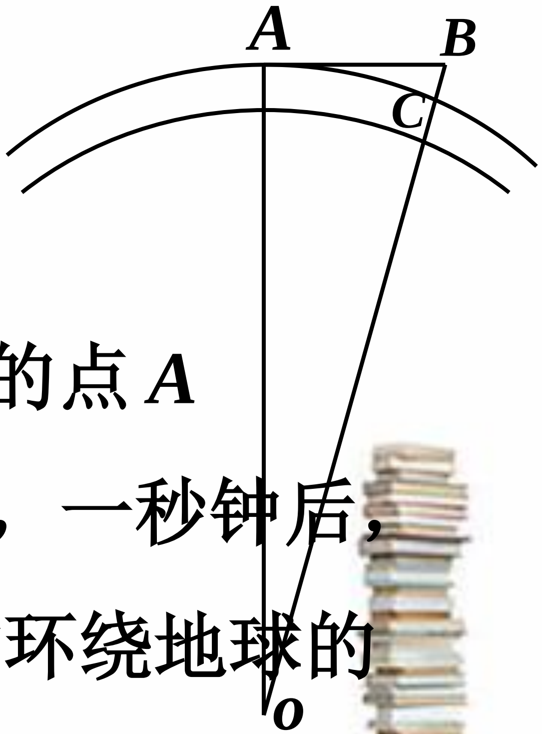
第二章　微分与导数

§1 微分与导数的概念

微分的原始思想在于寻找一种方法，当因变量的改变很微小时，能够精确而又简便地估计出这个改变量。



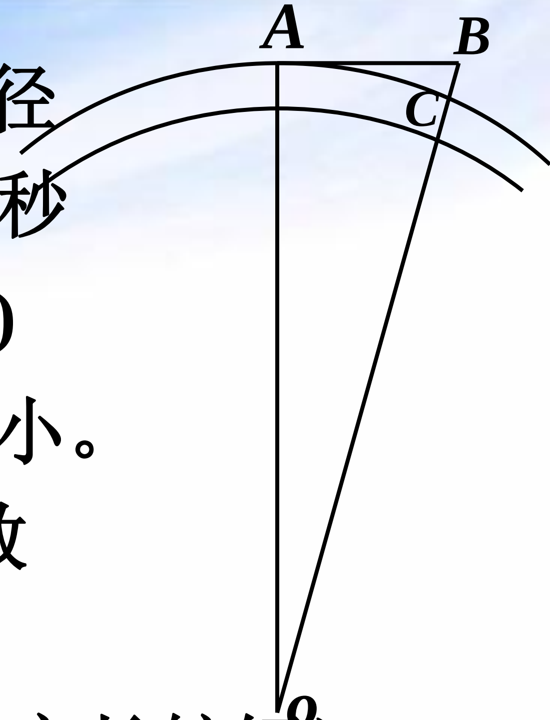
一、问题的提出

实例：求第一宇宙速度

设某时刻卫星处于地球表面附近的点 A（见图）其运动速度沿圆周切线方向，一秒钟后，卫星受运动到点 C，求：维持卫星作环绕地球的飞行所需的最低速度 v .

解：*OA* 和 *OC* 近似地取为地球的平均半径 6 371 000 m，*BC* 为自由落体在第一秒飞过的路程，即 $BC = \frac{1}{2} g \cdot 1^2 = 4.9\,(m)$

AB 长度为卫星的最小飞行速度的大小。



点 *O* 、*B* 、*C* 大致在一条直线上，故

$$AB^2 = (6\,371\,000 + 4.9)^2 - 6\,371\,000^2$$

显然，计算量甚大，即使用计算机（字长较短）计算也可能产生误差。将上式改写为

$$AB^2 = 2 \times 6\,371\,000 \times 4.9 + 4.9^2$$

可见第二项远远小于第一项，以至于可忽略不计。

所以，把计算简化为: $AB^2 = 2 \times 6\,371\,000 \times 4.9 \approx 7.9\,km$

维持卫星作环绕地球的飞行所需的最低速度：

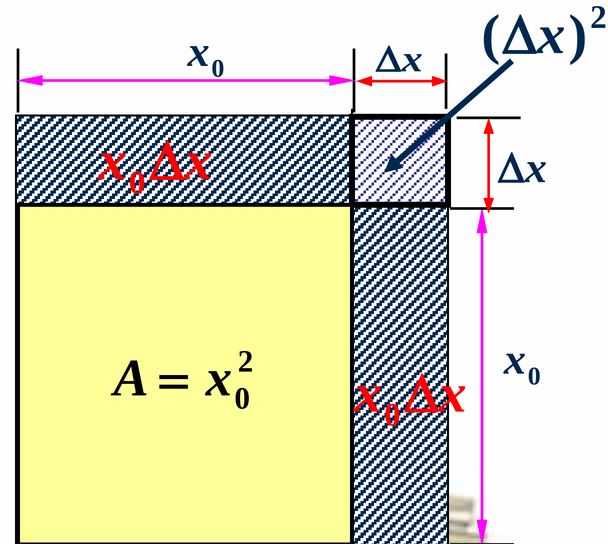
$$v \approx 7.9\,km/s$$

对 AB^2 作几何解释：

作一个边长为 $x_0 = OA$ 的正方形，当边长由 x_0 变化到 $x_0 + \Delta x$，$\Delta x = BC$，记其面积为 $A = x_0^2$，

$$\therefore \Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0 \cdot \Delta x}_{\Delta x\text{的线性函数}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)\text{(高阶无穷小)}}$$



$\therefore |\Delta x| \to 0$ 时，ΔA 用 $2x\Delta x$ 近似代替，

即 $\Delta A \approx 2x\Delta x$ 这就是微分概念。

此式有两个优点：

1) $2x\Delta x$ 是 Δx 的一次线性函数，便于计算；

2) 当 $|\Delta x|$ 很小时，ΔA 与 $2x\Delta x$ 的误差有良好的精度。

二、微分的概念

1、定义 设函数 $y=f(x)$ 定义于 $U(x,\delta)$，如果存在常数 k，∍ $f(x+\Delta x)-f(x)=k\Delta x+o(\Delta x)$

则称函数 f 在 x 处可微，且称 $k\Delta x$ 为 $y=f(x)$ 在 x 处的微分。记作

$$dy=k\Delta x \quad or \quad df(x)=k\Delta x$$

说明：1）k 仅与 x 有关而与 Δx 无关，$k=k(x)$

2）dy 是 Δx 的线性函数

3）$\Delta y-dy=o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶无穷小

4）当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx dy$

dy 是 Δy 的线性主部。

当 $f(x)$ 在 x 处可微且 $\Delta x \to 0$ 时，

将 Δx 称为自变量的微分，记作 dx；

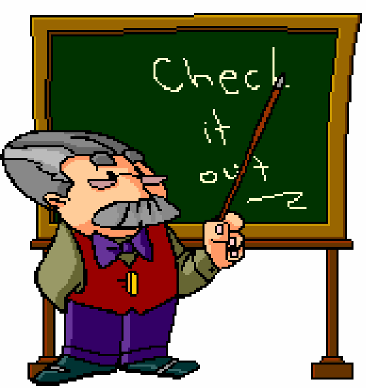
将 Δy 的线性主部 $k(x)dx$ 称为因变量的微分，

记作 dy 或 $df(x)$；则微分关系式为：$dy = kdx$

2、定理 设函数 f 在 x 处可微，则 f 在 x 处连续。

如果函数 f 在区间 (a, b) 中每一点处均是可微，

则称 f 是 (a, b) 上的可微函数。



三、导数的概念

若 $f(x)$ 在 x 处可微，

则有关系式 $\Delta y = k\,\Delta x + o(\Delta x)$

即 $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} + o(1)$

$\therefore$ k 是因变量的增量与自变量的增量之比的极限。

1、定义 设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称这个极限值为 $y=f(x)$ 在点x_0处的导数。

记为 $y'\big|_{x=x_0}$

即 $y'\big|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\overset{\text{等价定义}}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

也可记为 $f'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}$.

如果上述极限不存在，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导（不可导的原因很多）.

可导和可微都是研究 Δy 关于 Δx 变化的性态，它们之间必然有本质的联系。

定理： 函数 f 在点 x 可微 $\Leftrightarrow$ f 在点 x 可导

证："$\Rightarrow$" $\because f(x)$ 在点 x 可微

$$\therefore \Delta y = k\cdot\Delta x + o(\Delta x) \qquad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

则 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = k$$

即函数 $f(x)$ 在点 x 可导，且 $k = f'(x)$

"$\Leftarrow$" $\because$ 函数 $f(x)$ 在点 x 可导，

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \quad \text{即} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \ (\alpha \to 0)$$

$$\therefore \Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot(\Delta x) \quad \alpha \to 0 \ (\because \Delta x \to 0)$$

$$= f'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

由微分定义，函数 f 在点 x 可微，且 $k = f'(x)$

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微 $k = f'(x)$

$$\therefore\ dy = f'(x)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

即函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商为该函数的导数。 所以导数也叫微商。

所以求函数的微分可归结为求该函数的导数。

例1、$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 求：$f'(0)$

2、导函数

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可导，此时函数 $f(x)$ 对于(a, b) 内的每一个确定的 x 值，都对应着一个确定的导数，即构成一个新的函数，称为 $f(x)$ 的导函数（简称导数），即 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导。

记为 y'，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$

即 $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

导函数 $f' : x \mapsto f'(x) \quad x \in (a, b)$

结论 $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$

3、单侧导数

1）点 x_0 的左导数　　$f'_-(x_0)$

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

即为 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数，记为 $f'_-(x_0)$；

2）点 x_0 的右导数　　$f'_+(x_0)$

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

即为 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

结论：$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 存在且相等

例2、讨论 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 的可导性

4、可导与连续的关系

$f(x)$ 在 x_0 可导 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $f(x)$ 在 x_0 连续

$f(x)$ 在 x_0 必不可导 $\underset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ $f(x)$ 在 x_0 不连续

说明： $f(x)$ 在 x_0 可导 $\xrightarrow{?}$ $f'(x)$ 在 x_0 连续

四、导数的意义

1、变化率、变化速度

是因变量 y 在点 x_0 处的变化率，

反映了y 随自变量 x 的变化而变化的快慢程度。

1）t_0 时刻质点运动的瞬时速度：

Newton 第二定律：$F = ma$

在匀速的情况下，

加速度的定义是 $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

速度的定义是 $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

什么是变速直线运动的（瞬时）速度？

速度问题

时间： $t_0 \to t_0 + \Delta t \ (\Delta t \neq 0)$

路程： $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$

在该时间段内的平均速度：

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$ 取极限，得到时间 t_0 的瞬时速度

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

这就是导数的物理意义。

重要的数学模型——导数

时间 t_0 的瞬时加速度也就解决了。

2）设 t 时刻细菌的总数 $N(t)$，则在时段 $[t_0, t_0+\Delta t]$

中细菌数的变化量为 $\Delta N = N(t_0+\Delta t) - N(t_0)$，

$\dfrac{\Delta N}{\Delta t}$ 是细菌在该时段的平均增长率，

当 $\Delta t \to 0$ 时，其极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = N'(t_0)$

为 t_0 时细菌的瞬时增长率。

	均匀	不均匀
速　　度	$v=\dfrac{s}{t}$	$v=\dfrac{ds}{dt}$
加 速 度	$a=\dfrac{v}{t}$	$a=\dfrac{dv}{dt}$
电流强度	$i=\dfrac{q}{t}$	$i=\dfrac{dq}{dt}$
线 密 度	$\rho=\dfrac{m}{l}$	$\rho=\dfrac{dm}{dl}$
角 速 度	$\omega=\dfrac{\theta}{t}$	$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$

用导数来度量某个量的变化速度、变化率，数学上统称为函数的变化率。在实际应用中是很多的。如：

经济函数的变化率（边际成本、边际收益、边际利润等）；

资金流动比率，人口学中的人口增长速率；

种群的生长率和死亡率；

放射性物质的衰变率；

物理学中的光、热、磁、电的各种传导率；

化学中的反应速率等等。

例3、某商品的生产量为 q 时，生产总成本为 $C(q)$，导数 $C'(q)$ 称为边际成本，记为 $M(q)$. 即

$$M(q)=C'(q)\approx\frac{C(q+1)-C(q)}{(q+1)-q}$$

$M(q)$ 的经济含义：

当产量为 q 时，再多生产一个产品所多花的成本；也就是生产第 $q+1$ 个产品的成本。

2、导数、微分的几何意义

曲线上某一点处的切线斜率——导数的几何意义

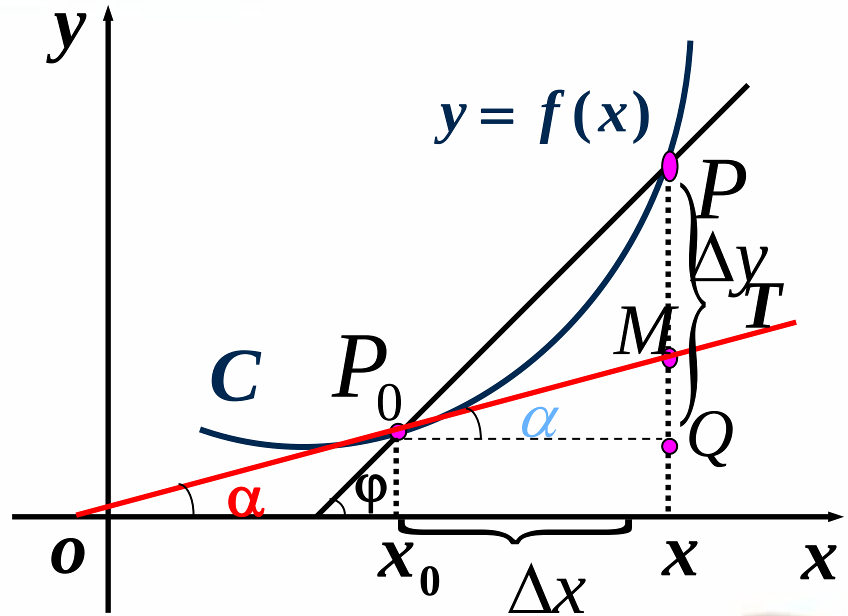
$P \to P_0$

$PP_0 \to P_0T$

P_0 的切线斜率

$$K = \tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



切线方程 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程 $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

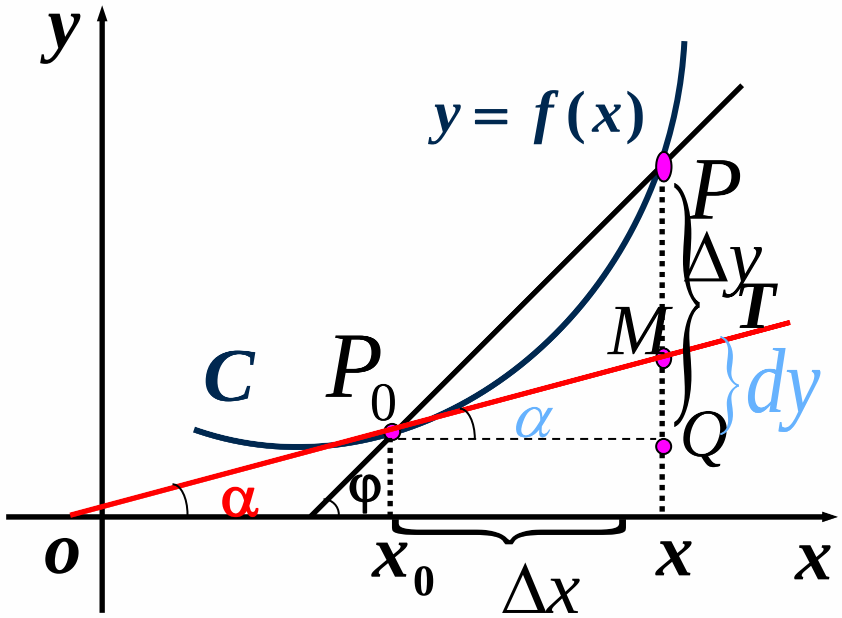
$$\because K = f'(x_0) = \tan\alpha$$

$$\therefore MQ = f'(x_0)\Delta x$$

$$\therefore dy = f'(x_0)\Delta x$$

当 Δy 是曲线的纵坐标增量时，

切线纵坐标对应的增量——微分dy 几何意义



例4、求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上任一点 (x_0, y_0) 处的切线方程；并由此证明：从椭圆一个焦点发出的任一束光线，经椭圆反射后，必经过它的另一个焦点。