§4 隐函数微分法及其应用

隐函数存在定理 $F(x, y) = 0$

设函数 $F(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0, \delta)$ 有定义，而且

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

2) 在 $O(P_0, \delta)$ 中 F 及其偏导数 F'_x, F'_y 连续,

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

则 $\exists \delta > 0$，在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中唯一确定隐函数 f,

使得 1) $F(x, f(x)) = 0$，$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$y_0 = f(x_0)$

2) f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中可微，且 $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}}$

隐函数的求导公式 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

当隐函数 f 存在时，由 $F(x, y) = 0$，两边对 x 求导得

$$F'_x + F'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad (y = f(x))$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

隐函数存在定理 $F(x,y,z)=0$

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $O(P_0,\delta)$ 有定义，而且

1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$，

2) 在 $O(P_0,\delta)$ 中 F 及其偏导数 F'_x, F'_y, F'_z 连续，

3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，

则 $\exists\delta>0$，在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中唯一确定二元隐函数 f，

使得 1) $F(x,y,f(x,y))=0$，$P\in O(P_0,\delta)$，

$$z_0=f(x_0,y_0);$$

2) f 在 $O(P_0,\delta)$ 中可微，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

例1、求方程 $x^2+y^2-1=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 的一阶导数和二阶导数。

例2、求由方程 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 dz.

例3、设 $z=f(x+y+z,xyz)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial x}{\partial y}$，$\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

例4、设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}) = 0$

所确定，其中F 具有连续偏导数。

证明 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$

例5、设 $u = f(x, z)$ 而 z 是由方程 $z = x + y\,g(z)$ 所确定的 x、y 函数，f、g 都有连续的导数，求 du，$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

综合练习

1、设 $u=e^{xz}+\sin(yz)$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程

$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ 所确定的隐函数，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

2、设 $F(x,y)$ 具有连续的偏导数吗，已知方程

$F(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z})=0$，求 dz.