§2 全微分与偏导数

一、偏导数

二元函数偏导数的定义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$ 存在，

则称此极限为函数 f 在 P_0 处对于 x 的偏导数。

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$　$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$　$f_x'(x_0,y_0)$

同理可定义 f 在 P_0 处对于 y 的偏导数：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

多元函数偏导数的定义

设 n 元函数 $u=f(x)$ 在 $x_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)^T$ 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,\cdots,x_i^0+\Delta x_i,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta x_i}$$

$(i=1,\ldots,n)$ 存在，

则称此极限为函数 f 在 x_0 处对于 x_i 的偏导数。

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x_i}\right|_{x_0}$　$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y_i}\right|_{x_0}$　$f_{x_i}'(x_0)$　$u_{x_i}'(x_0)$

如果多元函数 $u=f(x)$ 在某区域 D 上每一点处均存在偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$，

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 也是区域 D 上的一个函数，

称为 u 的一个偏导函数，简称偏导数。

例1、求函数 $f(x,y)=e^{xy}\cos(\frac{\pi}{2}x)+(y-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$ 在(1, 1)处的偏导数。

例2、求 $z=\int_{x}^{y^2}\sin(1+t^2)\,dt$ 的偏导数。

例3、求 $z=x^y+y^{\arctan\frac{x}{y}}$ 的偏导数。

说明 1）多元函数求偏导数的运算也遵循类似于一元函数求导的四则运算法则。

2）求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求。

例4、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

求 $f(x,y)$ 的偏导数。

偏导数存在与连续的关系

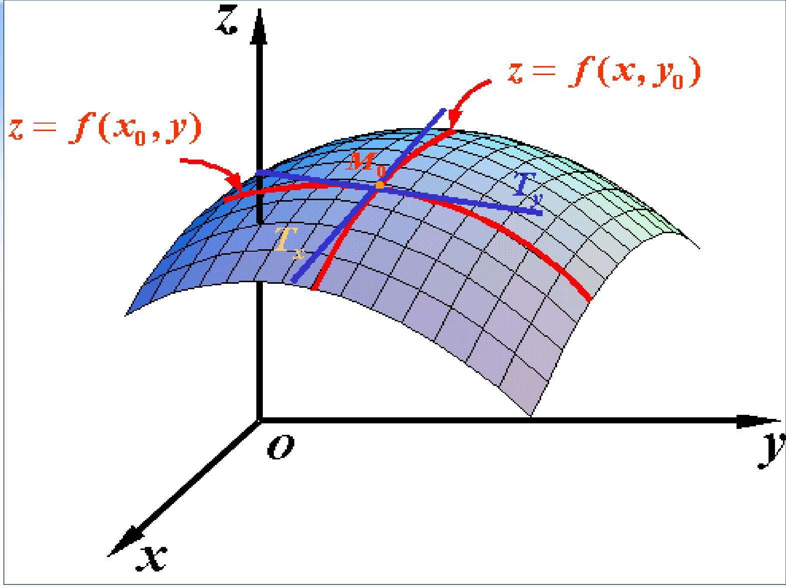
一元函数　　　　可导 $\Rightarrow$ 连续

二元函数在某点偏导数存在 $\overset{?}{\Rightarrow}$ 连续

例5、设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数及连续性。

偏导数的几何意义



设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，

偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是曲面 $z=f(x,y)$ 被平面 $y=y_0$ 所截得的曲线 $\begin{cases} x=x \\ y=y_0 \\ z=f(x,y_0) \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率；

偏导数 $f'_y(x_0,y_0)$ 就是曲面 $z=f(x,y)$ 被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线 $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y \\ z=f(x_0,y) \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率。

二、全微分

二元函数全微分的定义

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

其中 A , B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x , y 有关

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

则称函数 f 在点 (x,y) 处可微,

并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 f 在点 (x,y) 处的 全微分。

记作 $dz = A\Delta x + B\Delta y$

由多元线性函数及一元函数微分的概念

$\Rightarrow dz = A\Delta x + B\Delta y$

多元函数全微分的定义

设 n 元函数 $u=f(x)$ 在 $x_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)^T$ 的某邻域内有定义，如果有一个关于 $\Delta x=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)^T$ 的线性函数 k，使得

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=k(\Delta x)+o(\|\Delta x\|)$$

则称 f 在点 x_0 处可微，

并称 $k(\Delta x)$ 为 f 在 x_0 处的全微分。

记作 $du=k(\Delta x)$

由多元线性函数及一元函数微分的概念

$$\Rightarrow du=a_1dx_1+\cdots a_ndx_n$$

定理　如果函数在某区域 D 内处处可微，则称函数在 D 内可微分。

定理　设 n 元函数 $u=f(x)$ 在 $x_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)^T$ 处可微则 f 在 x_0 处连续。

定理（充分条件）

若二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微，

则它在该点处偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 均存在，而且

全微分：$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

若 n 元函数 $u = f(x)$ 在x 处可微分，

则它在该点处关于诸 x_i 的偏导数均存在，而且

全微分：$du = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$

定理（必要条件）

若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域中有连续的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ，则称函数 f 在点 x 处可微，而且

全微分： $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

若 n 元函数 $u=f(x)$ 在点 x 的某邻域中有连续的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$ ，则称函数 f 在点 x 处可微，而且

全微分：$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

说明

1）由全微分的定义及充分条件得

而且 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta u - du}{\rho} = 0 \Rightarrow$ 函数在某点可微。

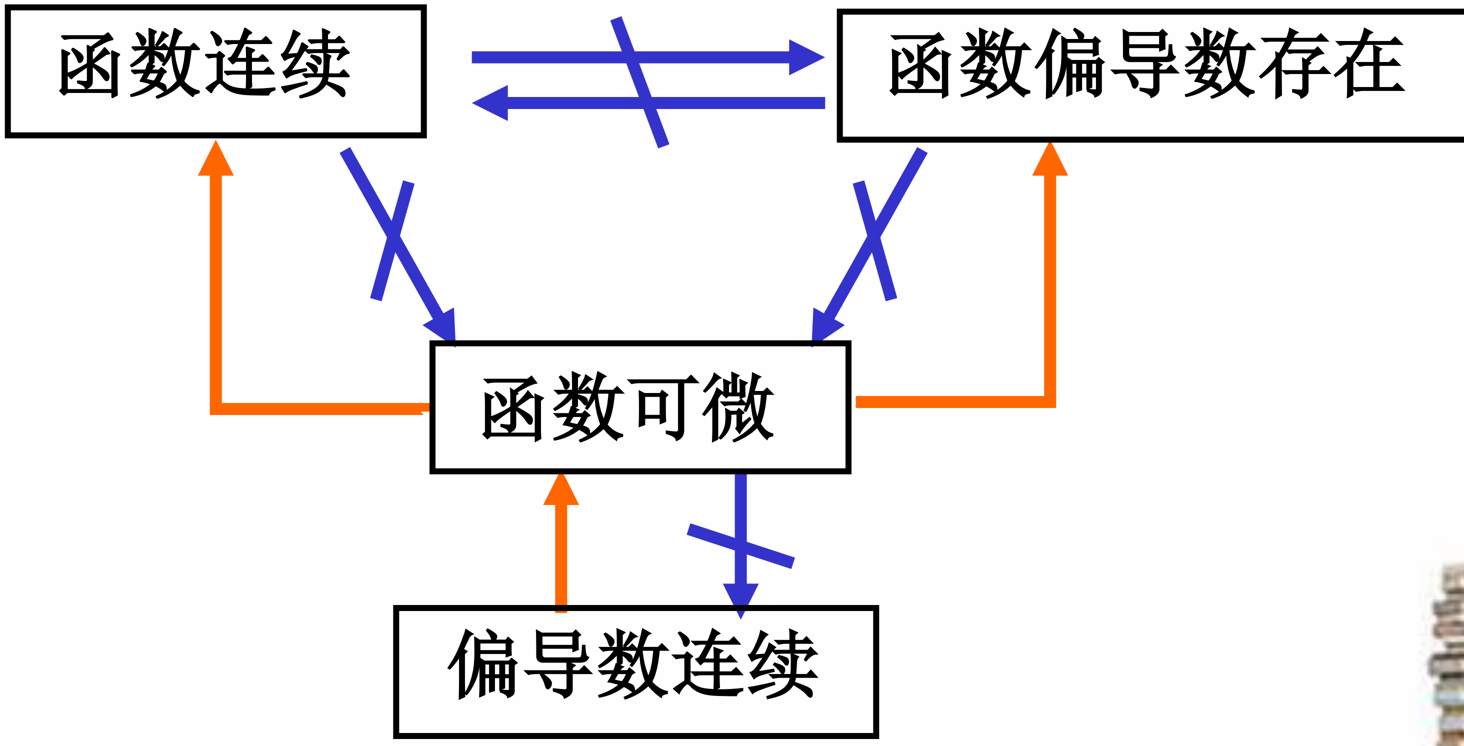
2）多元函数的各偏导数存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在

一元函数在某点的导数存在 $\Longleftrightarrow$ 微分存在

例6、$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$

讨论点 (0, 0) 的偏导数及可微性。

多元函数连续、可导、可微的关系



例7、求 $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的全微分。

例8、设 $x=z\ln\frac{z}{y}$，求 dz .

例9、设 $z=f(x)^{g(y)}$, $f(x)$, $g(y)$ 皆可导，且 $f(x)>0$,

求 dz .

三、全微分在近似计算中的应用

全微分近似公式

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$$
$$\approx f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

也可写成

$$\Delta z \approx dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

例10、求函数 $\sqrt{20-x^2-7y^2}$ 在点 (1.95, 1.08) 的近似值。

五、高阶偏导数

定义 若多元函数 $u=f(x_1,\cdots,x_n)$ 关于 x_i 的一阶偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 仍是一个多元函数，

则它对于 x_j 的偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)$，

称为 u 对于 x_i, x_j 的二阶偏导数。

记作 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$，$f''_{x_i x_j}(x_1,\cdots,x_n)$，为混合偏导数。

当 $j=i$ 时，称为 u 对于 x_i 的二阶偏导数。

记作 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$，$f''_{x_i^2}(x_1,\cdots,x_n)$.

例11、已知 $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，

求：f_x'，f_y'，f_{x^2}''，f_{xy}''，f_{yx}''.

问题1 混合偏导数都相等吗？

例12、$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

求：$f(x,y)$ 在点$(0,0)$的二阶混合偏导数。

问题2 在什么条件下混合偏导数相等？

定理 如果二元函数 $f(x,y)$ 混合偏导数 f''_{xy}、f''_{yx} 在 (x_0,y_0) 连续，则 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

说明 1) 类似地，可定义三阶偏导数，…，n 阶偏导数。

2) $z=f(x,y)$ 先对 x 求 k 阶偏导数，再对 y 求 $n-k$ 阶偏导数，所得的 n 阶偏导数可记作 $\dfrac{\partial^n u}{\partial^{n-k} y\,\partial x^k}$ 或 $f''_{x^k y^{n-k}}$.

综合练习

1、 $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$，求：$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\pi)}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\pi)}$.

2、 $u=x^{y^z}$，求：$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

3、 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，求：$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$.

4、设 f、g 具有二阶连续导数，

$$z=x^2 f\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}g\left(\frac{x}{y}\right)$$，求其二阶导数。

5、已知在全平面上

$$(y^3\sin x-ky^2+5)dx+(xy+my^2\cos x)dy$$

是某个二元函数 u 的全微分，求常数 k,m.