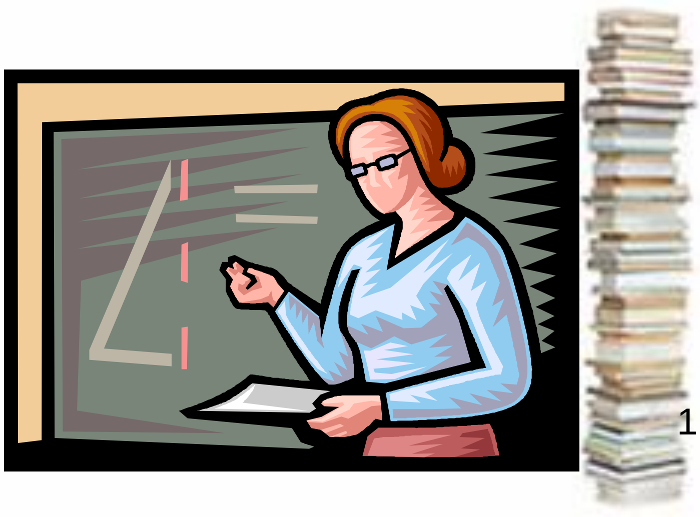
§7　函数的单调性和凸性

函数的导数描述了函数局部的变化形态（函数变化的快慢），本节将在微分中值定理的基础上，以导数为工具，从整体上研究函数的变化状况。



一、函数的单调性

定理：

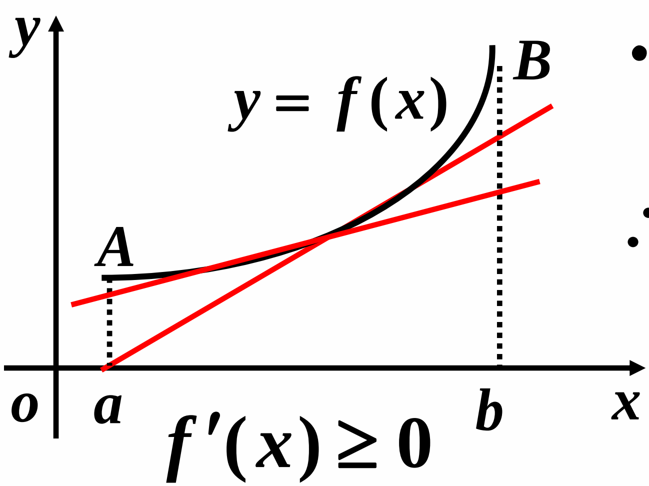
设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，

则 f 在 $[a, b]$ 上单调增加（单调减少）

$\Leftrightarrow \forall x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ 成立。

证："$\Rightarrow$" 设 f 在 $[a, b]$ 上单调增加

$\forall x, x' \in (a, b)$ $x \neq x'$ 有 $\dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq 0$



$\because f$ 在 (a, b) 可导，

$$\therefore f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq 0$$

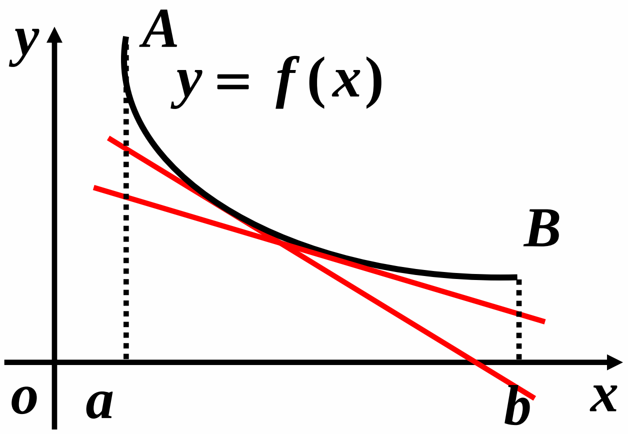
"$\Leftarrow$" 设在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0$

$\forall\ x_1, x_2 \in [a, b]$　假设 $x_1 < x_2$

由微分中值定理 $\exists \xi \in (a, b)$

$\ni f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$

$\therefore f(x_2) \geq f(x_1)$　即 f 单调增加。



$f'(x) \leq 0$

结论：

如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，

且 $\forall x \in (a, b)$ 有 $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$

则 f 在 $[a, b]$ 上严格单调增加（严格单调减少）。

求函数单调增减区间的步骤

1）求出 f 的 D_f 及间断点

2）求出 $f'(x) = 0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点

3）上述各点将 D_f 分成若干区间

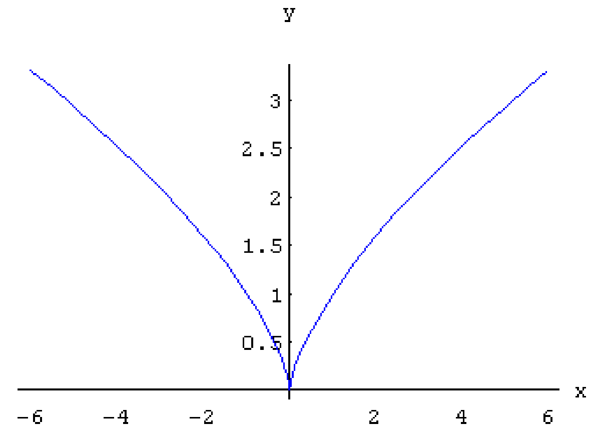
4）在此区间上确定 $f'(x)$ 的符号，从而判断在此函数的单调性。可列表讨论。

例1、讨论函数的单调性 $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}$

例2、证明当 $x>0$ 时，$\sin x > x-\dfrac{x^3}{6}$

例3、设 $x>0$ $a>e$ ，证明 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

二、函数的极值



驻点： 满足 $f'(x)=0$ 的点。

注意： 1）极值点 $\nLeftrightarrow$ 驻点

2）极值点只可能出现在函数的驻点或不可导点之中。

例4、$f(x)=x^3$，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 在点 $x=0$ 的情况。

定理(极值第一充分条件)

设函数 $f(x)$ 在 $U_{(x_0)}$ 内连续，且可导（x_0 可除外），

则1）若在 $(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)\geq 0$

而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\leq 0$

$\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 取到极大值，x_0 为极大值点；

2）若在 $(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)\leq 0$

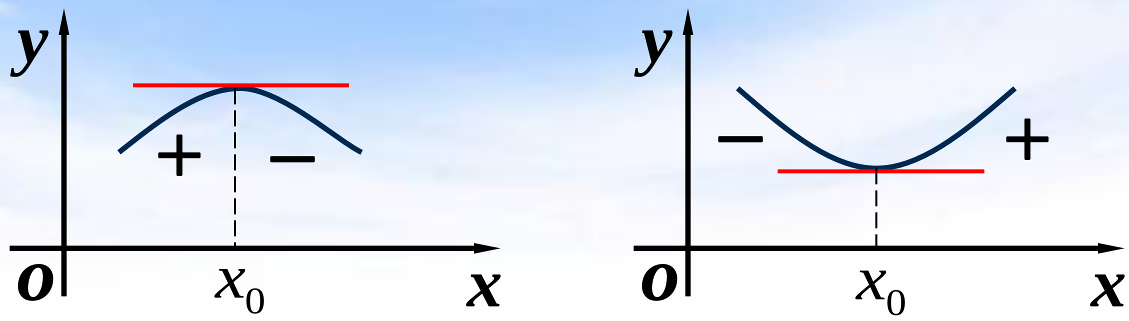
而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 取到极小值，x_0 为极小值点；

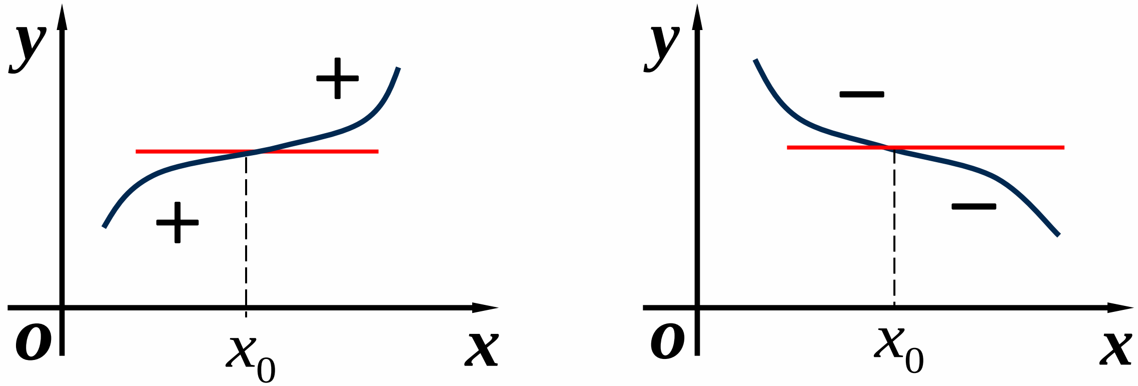
3）若在 $x\neq x_0$ 时，$f'(x)\geq 0$ $(or\ f'(x)\leq 0)$

$\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 没有极值。

(是极值点情形)



(不是极值点情形)



上例1（*PPT* 6）

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\nearrow$	无定义	$\searrow$	没有极值	$\searrow$	$f_{\min}(4) = 2$	$\nearrow$

定理(极值第二充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$

则1）若 $f''(x_0)<0$ 时，x_0 为$f(x)$ 极大值点；

2）若 $f''(x_0)>0$ 时，x_0 为$f(x)$ 极小值点；

3）若 $f''(x_0)=0$ 时，则不能判定 x_0 是否为极值点。

证：1）$\because f'(x_0)=0$，由在 $x=x_0$ 的 *Taylor* 公式，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$\therefore \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}f''(x_0)<0$$

由保号性得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}<0$

$\therefore f(x)<f(x_0)$

$\therefore x_0$ 为$f(x)$ 极大值点；

同理可证 2）、3）.

例5、求函数 $f(x)=nx(1-x)^n \; n\in Z^+$ 在 (0, 1) 内的

极值 $M(n)$，并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

例6、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续的二阶导数且满足 $xf''(x)+2xf(x)[f'(x)]^2=1-e^{-x}$

1）若 $f(x_0)(x_0\neq 0)$ 为 $f(x)$ 的极值，证明它是极小值；

2）若 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值，那么是极大值？极小值？

三、函数的最值

经常需要研究如何花费最小代价去获取最大收益的问题，在许多情况下，可归结为求一个函数在某一范围内的最大值或最小值问题。

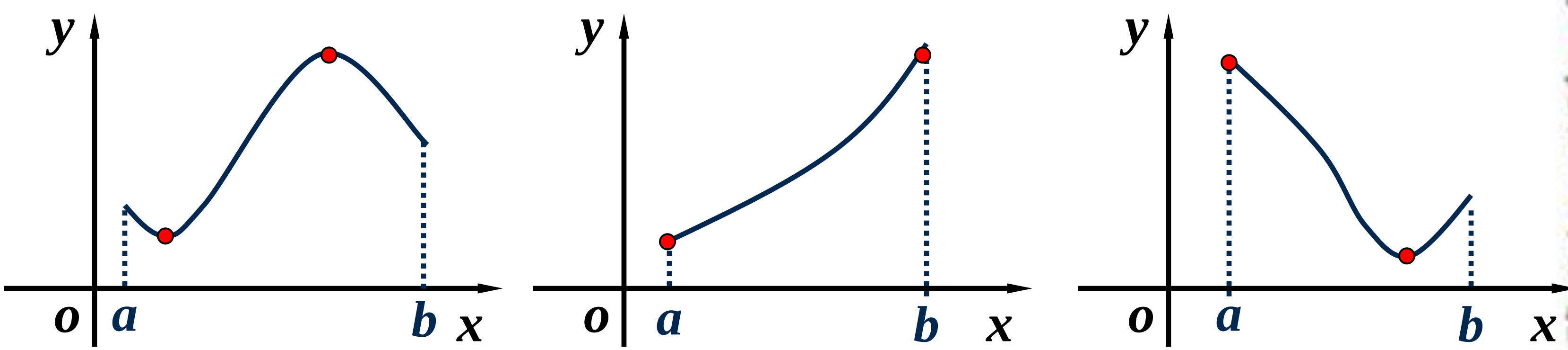
函数的最大值与最小值统称为函数的最值。

极值是函数的一种局部性质，而最值是整体性质。

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值存在，

且不在端点取到必在此开区间内某极值点上取到。



说明:

函数 f 在 $[a, b]$ 上取到最值点必是三类点之一：

1）f 的驻点； 2）f 的不可导点；3）区间的端点；

最值的求法

比较上述点的函数值，最大者为最大值，最小者为最小值。

例7、求 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ 在 $[0, 2]$ 上的最值。

开区间上函数 f 的最值呢？

定理 设函数 f 在 (a, b) 上具有连续导函数，

f' 只有唯一的零点 x_0 ，

如果 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 是 f 的最小值点；

如果 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 是 f 的最大值点。

说明 处理实际问题时，

如果函数在区间内只有唯一极值点，则

这个极值就是最值。

例8、直线 $y = t\ (t > 0)$ 与曲线 $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ 交于两点 A，B，过 A，B 的平行于 y 轴的两条直线与 $y = t$ 和 x 轴围成一个矩形，将这矩形绕 x 轴旋转一周，可得一个圆柱体，求此圆柱体的最大体积。

例9、设正数 x 和 y 满足 $x + y = 100$，n 是一个正整数。试证：当 $x = y$ 时，$x^n + y^n$ 达最小值，$x^n y^n$ 达最大值。

例10、在对污染的测定时，要求与污染源的距离至少 1 km．当污染源相对集中时，空气受污染的程度与释放的污染量成正比，与污染源的距离成反比（设比例系数为 1)．现有两相距 10 km的工厂区A与 B , 它们释放的污染分别为 60 μg/ml 与240 μg/ml . 计划在A、B间建一居民小区，问居民小区建在何处所受的污染最小？

例11、用铝合金制造容积固定的圆柱形罐头，罐身（侧面和底部）用整块材料来制而成，顶盖是另装上去的，设顶盖的厚度是罐身厚度的三倍。问如何确定它的底面积半径和高才能使得用料最省？

注意：用同样的方法可以推出，若圆柱形的有盖容器是用厚薄相同的材料制成的，那么当它的底面直径和高相等的时候用料最省。许多圆柱形的日常用品都是采用这样的比例设计的。

例12、对产品从生产到销售的过程进行经济核算时，至少涉及三个方面的问题：成本、收益和利润。设产量为 Q，总成本 $C(Q)$ 一般可以表示成两部分的和

$$C(Q) = C_0 + v(Q) \cdot Q$$

$C_0 > 0$ 称为固定成本（如厂房和设备的折旧、工作人员的工资、财产保险费等），一般认为与产量无关，而 $v(Q) \cdot Q$ 称为可变成本（如原材料、能源等），$v(Q)$ 是一个正值函数，表示在总共生产 Q 件产品时，每生产一件的可变成本。

$C(Q)$的导数 $C'(Q)$称为边际成本，其经济意义是在总共生产 Q 件产品的情况下，生产第 Q 件产品的成本。

总收益 $E(Q)=p(Q)\cdot Q$ 是指把 Q 件产品销售出去后得到的收入，$p(Q)$ 称为价格函数，表示在总共生产 Q 件产品的情况下，每件产品的销售价格。一般说来，生产量越大，每件产品的价格就越便宜，因此 $p(Q)$ 是 Q 的单调减少函数。

$E(Q)$的导数 $E'(Q)$称为边际收益，其经济意义是在总共生产销售了 Q 件产品的情况下，销售出第 Q 件产品所得到的收入。

总收益减去总成本便是总利润。将利润函数记为 $P(Q)$，则 $P(Q)=E(Q)-C(Q)$

当 $E(Q)$ 和 $C(Q)$ 二阶可导时，得到经济学中的

最大利润原理：

当且仅当边际成本与边际收益相等，并且边际成本的变化率大于边际收益的变化率时，可取得最大利润。

即 $P'(Q) = E'(Q) - C'(Q) = 0$，

$$P''(Q) = E''(Q) - C''(Q) < 0.$$

数学建模：

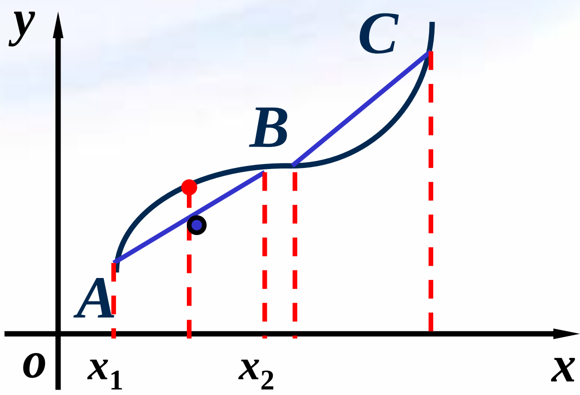
用数学技术去解决实际问题，首先必须将所考虑的现实问题通过合理简化，用数学工具将它归结为一个相应的数学问题，这个过程称为数学建模，所得到的数学问题称为数学模型。

数学建模中，最重要、最常用的数学工具是微分。

例13、在供水、化工生产等过程中，都有一个对液体进行过滤，除去渣滓的问题。现以过滤式净水器的使用为例，建立数学模型。

四、函数的凸性

研究曲线的弯曲方向。



定义 设 f 在 $[a, b]$ 上连续，

如果对 (a, b) 上任意两点 x_1，x_2，

恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$

那么称 f 在 $[a, b]$ 内是下凸的；

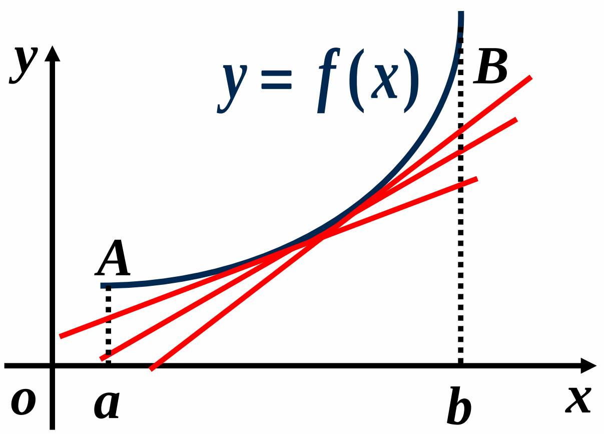
如果恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$

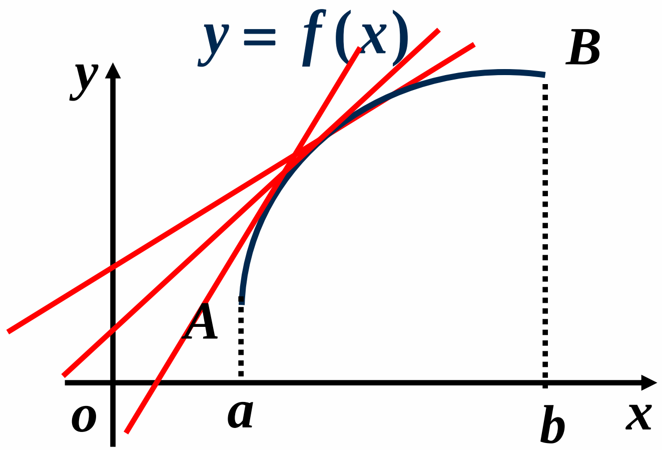
那么称 f 在 $[a, b]$ 内是上凸的。

定理 设 f 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内二阶可导， 若在 (a, b) 内

1）$f''(x) \geq 0$ 则曲线 f 在 $[a, b]$ 上是下凸的；

2）$f''(x) \leq 0$ 则曲线 f 在 $[a, b]$ 上是上凸的。





$f'(x)$ 递增 $y'' > 0$　　　　$f'(x)$ 递减 $y'' < 0$

证：$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 记 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$

$=\frac{1}{2}[f(x_2)-f(x_0)]-\frac{1}{2}[f(x_0)-f(x_1)]$

由微分中值定理

$\eta\in(x_1,x_0)$

$=\frac{1}{2}[f'(\xi)(x_2-x_0)+f'(\eta)(x_0-x_1)]$ $\xi\in(x_0,x_2)$

$\xi>\eta$

(x_0 用 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 代入)

$=\frac{1}{4}[f'(\xi)-f'(\eta)](x_2-x_1)$ 再由微分中值定理

$\because f''(\zeta)\geq 0$

$=\frac{1}{4}f''(\zeta)(\xi-\eta)(x_2-x_1)\geq 0$

$\zeta\in(\eta,\xi)$

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 即下凸

五、曲线的拐点

定义 曲线上凸与下凸的分界点称为拐点。

定理 （拐点的判别法）

设函数 f 在 $U_{(x_0)}$ 内连续，且具有二阶导数（x_0 点可除外），

1）如果在 x_0 的两侧 $f''(x)$ 的符号相反，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点；

2）如果在 x_0 的两侧 $f''(x)$ 的符号相同，则 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点。

求曲线的上凸、下凸区间及拐点的步骤：

1）求曲线 f 的 D_f，

2）求出 D_f 内 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$不存在的点，

3）上述各点将 D_f 分成若干区间，

4）讨论其区间上 $f''(x)$ 的符号，确定曲线的凸向并求出拐点。

例14、讨论 $y=e^{-x^2}$ 的单调性、极值、凸性及拐点。

六、函数图象的描绘

利用函数特性描绘函数图形。

作函数图形的一般步骤：

1）确定曲线 的 D_f ，分析其对称性、周期性等；

2）计算 $f'=0$, $f''=0$ 的点及不可导点。

3）上述各点将定义域分成若干区间，讨论各部分区间上 f', f'' 的符号，确定 f 的单调性、极值点、上凸、下凸区间以及拐点。

4）讨论图形有无渐近线（斜、垂直、水平）。

5）标出图形上的特殊点如：极值点、拐点、交点等，根据上述函数的特殊性描出图形。

例15、作函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形。

解： D_f ：$(-\infty,+\infty)$ 偶函数 关于 y 轴对称

$$\varphi'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \quad \Rightarrow x=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \quad \Rightarrow x=-1 \quad x=1$$

列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$		拐点 $(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$		极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	

$$\because a=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$$

得水平渐近线 $y=0$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$