§4 定积分的应用

在自然科学等各个领域中应用定积分来度量是相当的多，如几何、概率和物理等方面。为了便于各类定积分应用问题的分析和计算，先介绍微元法的概念。

一、微元法

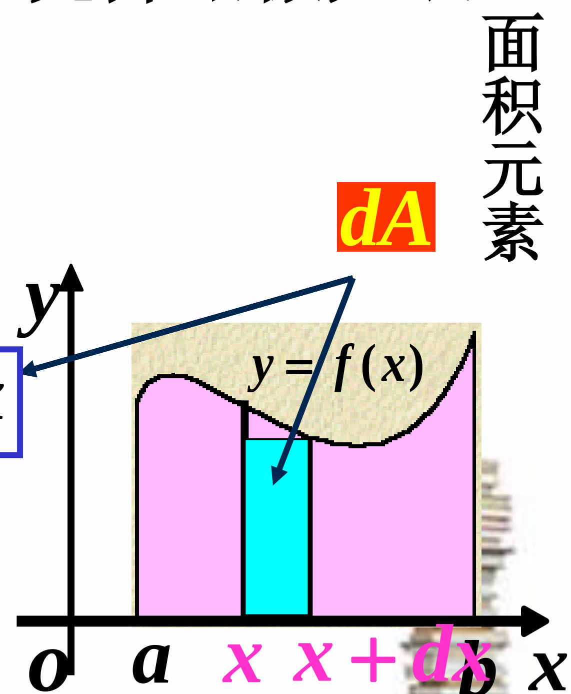
曲边梯形面积

微元：dx

$$\Delta A \approx \boxed{f(x)dx}$$

微面积 $f(x)dx$

曲边梯形总面积



$$A = \lim \sum f(x)dx = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx$$

若某个量I 与变量x 的变化区间$[a, b]$有关，且符合

1）满足关于区间的可加性，即整体等于局部之和；

$$I = \sum \Delta I_i$$

2）它在 $[x, x+dx]$ 上的部分量ΔI 近似于 dx 的一个

线性函数，即 $\Delta I - dI = o(dx)$,

其中$dI = f(x)dx$称之为量 I 的微元；

则总量I 是微元的积分。即 $I = \int_a^b f(x)dx$

在应用问题中往往略去$\Delta I - dI = o(dx)$ 的验证。

微元法的一般步骤:

1）根据具体问题，选取积分变量 x，并确定其积分区间 $[a, b]$；

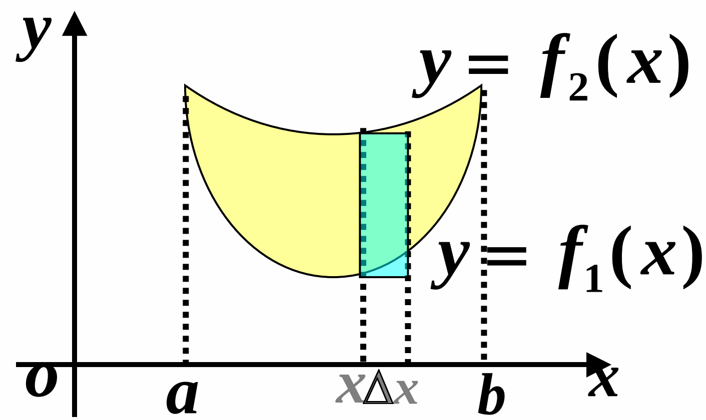
2）设想把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间，
取其中任一小区间，记为 $[x, x+dx]$，
求出相应于此小区间的部分量 ΔI 的近似值，
微元 $dI = f(x)dx$

3）以微元 $dI = f(x)dx$ 为积分表达式，
在 $[a, b]$ 上作定积分，得 $I = \int_a^b f(x)dx$.

二、面积问题

1、直角坐标下的区域

曲线 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$，直线 $x = a$，$x = b$，求其所围区域的面积。

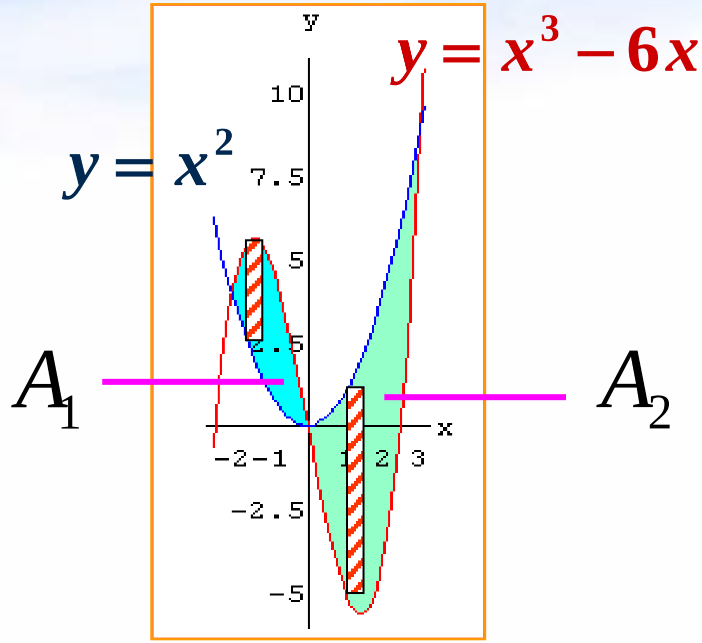


面积微元为

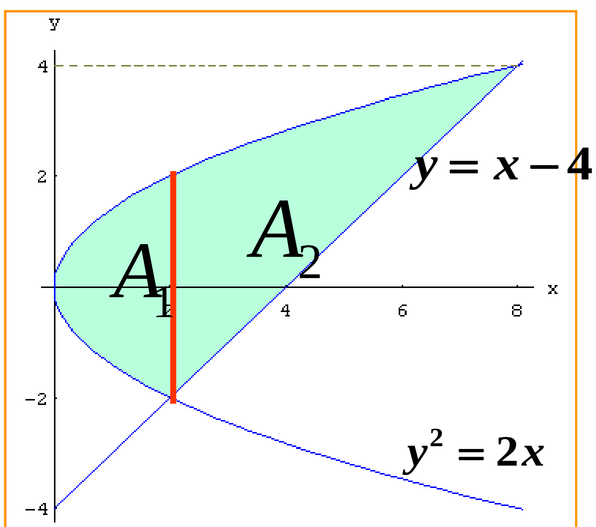
$$dA = [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$

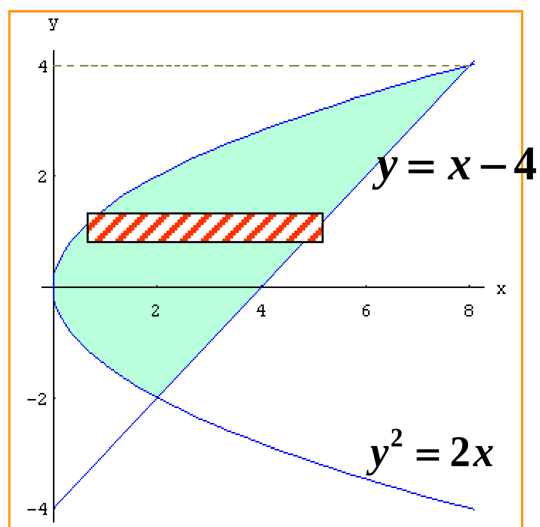
$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$

例1、求曲线 $y=x^2, y=x^3-6x$ 所围成的区域的面积



例2、求曲线 $y^2=2x, y=x-4$ 所围成的区域的面积





2、参数方程形式下的面积问题

如果曲边梯形的曲边为参数方程

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$ $x\,(t)$ 严格单调，

$x\,(t)$，$y\,(t)$ 具有连续导数，$y(t) \geq 0$

则曲边梯形的面积为 $A = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$

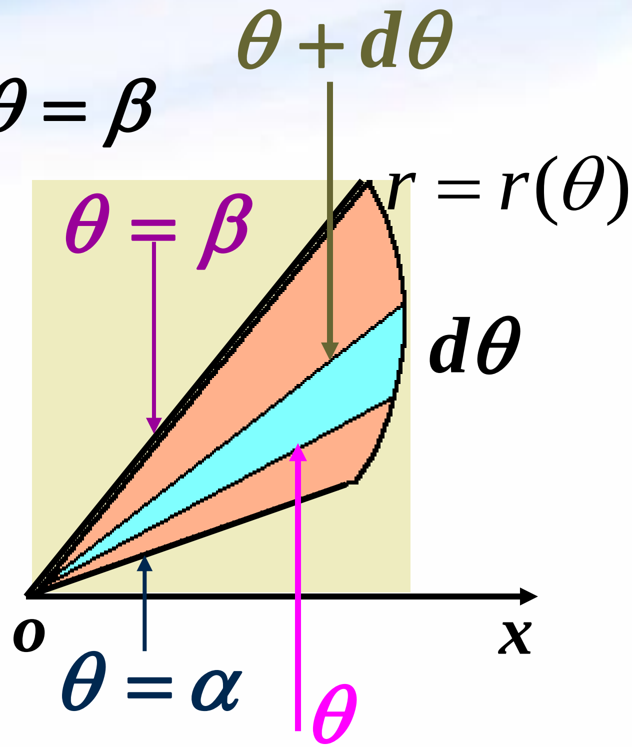
例3、求旋转曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

与x 轴围成的面积。

3、极坐标下的面积问题

由曲线 $r=r(\theta)$， 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$

围成的曲边扇形面积。



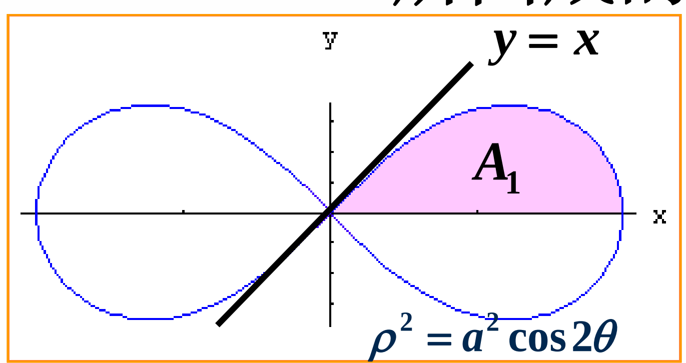
$r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续，

面积元 $dA=\dfrac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$

∴曲边扇形的面积为

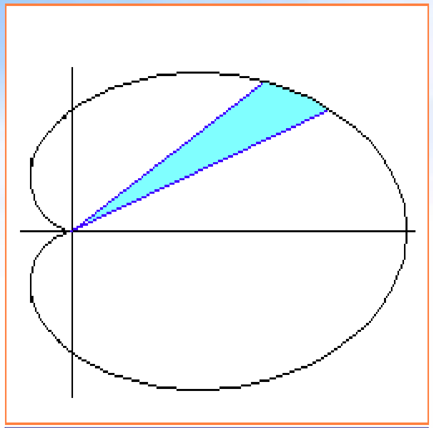
$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$$

例4、求双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 所围成的区域的面积。



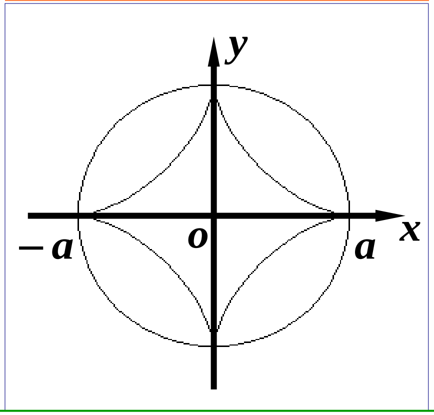
心脏线

$$r = a(1+\cos\theta)$$



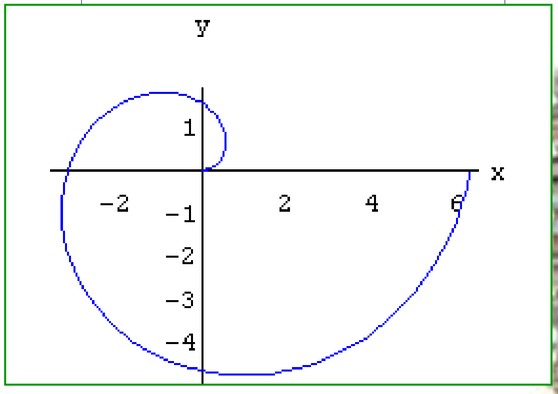
星形线

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad or \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



Archimedes 螺线

$$r = a\theta$$



思考题

设曲线 $y = f(x)$ 过原点及点(2, 3)，且 $f(x)$ 为单调函数，并且是连续可导函数，现在曲线上任取一点，作两坐标轴的平行线，其中一条平行线、x 轴及 $f(x)$ 围成的面积是另一条平行线、y 轴及 $f(x)$ 围成的面积的两倍。求曲线 $f(x)$ 的方程。

三、已知平行截面面积求体积

设空间体Ω介于平面 $x = a$ 和 $x = b$ 之间，

被垂直于 x 轴的平面截出的面积为 $A(x)$，

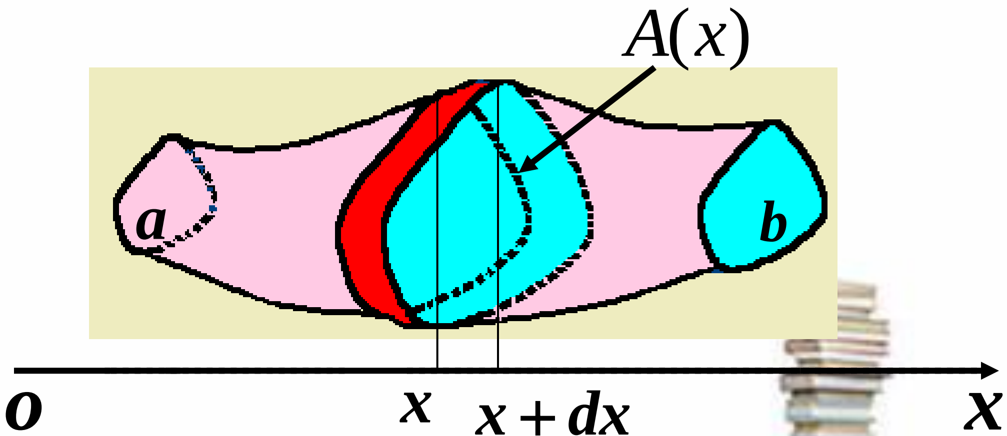
所以，相应于$[x, x+dx]$ 上的体积微元为：

母线与 x 轴平行，高为 dx，底面积为 $A(x)$

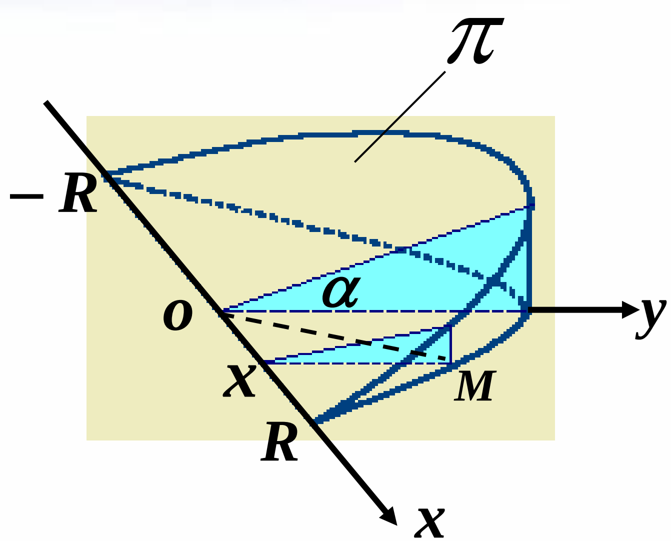
的柱体体积，即

$$dV = A(x)dx$$

$$\therefore V = \int_a^b A(x)dx$$

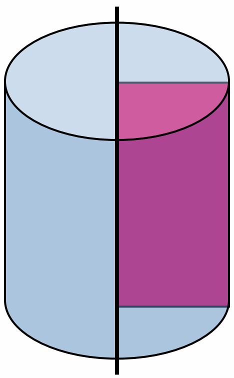


例5、一平面 π 经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并于底面成夹角 α，计算平面 π 截圆柱体所得部分的体积。

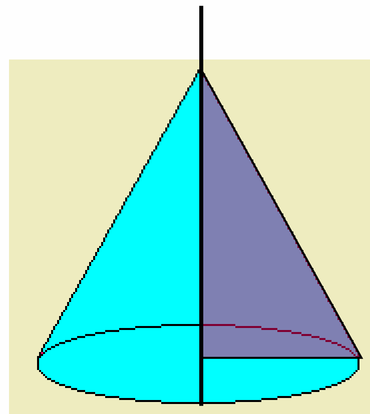


四、旋转体的体积

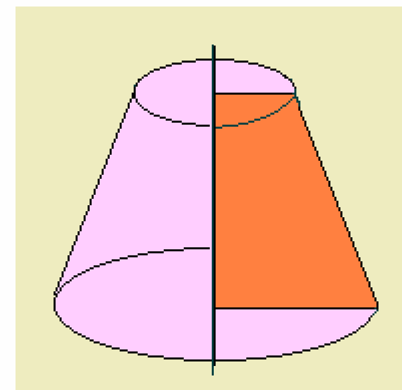
旋转体 就是有一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体。这直线叫旋转轴。



圆柱



圆锥



圆台

1、设空间体Ω 由平面图形

$$\{(x,y) \mid 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\}$$

绕 x 轴旋转一周而成，求此体积。

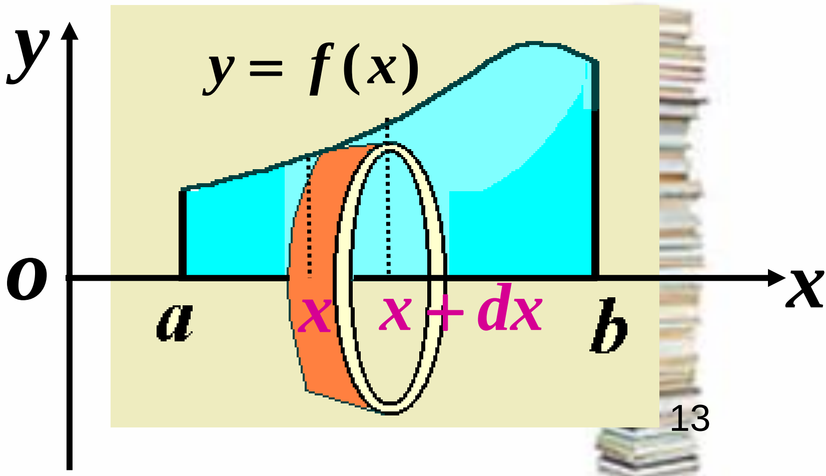
解：用在 x 处与 x 轴垂直的平面截此立体所得截面是一个半径为 $f(x)$ 的圆，

截面面积为 $A(x) = \pi[f(x)]^2$

体积微元 $dV = A(x)dx$

∴旋转体体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$



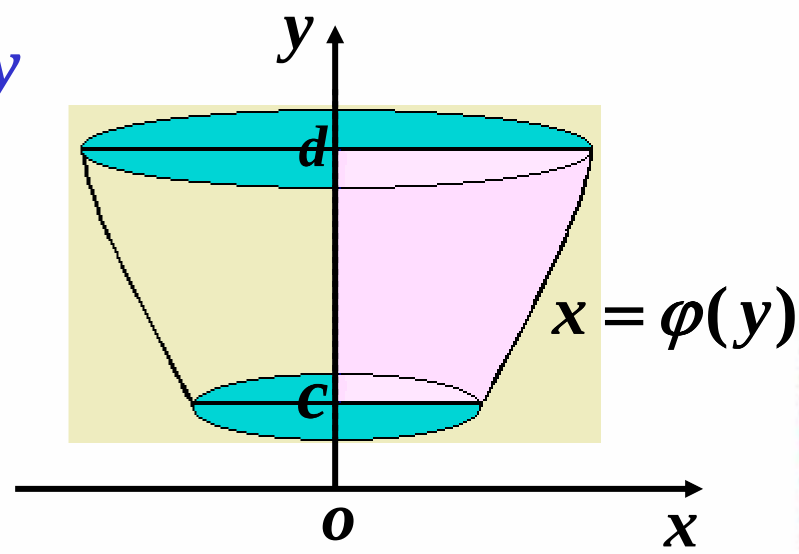
类似地

2、设空间体Ω 由平面图形

$$\{(x, y) \mid 0 \le x \le \varphi(y), c \le y \le d\}$$

绕 y 轴旋转一周而成的体积为

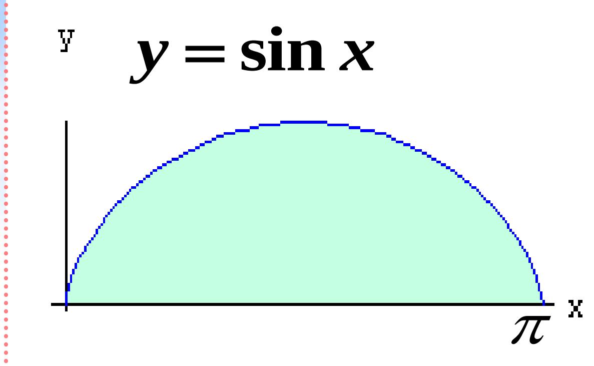
$$V = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



例6、求 $y=\sin x \quad y=0 \quad 0\le x\le\pi$

1）绕 x 轴旋转的体积；

2）绕 y 轴旋转的体积。



例7、求曲线 $y=\ln x$ 及曲线上过点 $(e,1)$ 的切线和 x 轴所围成图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积。