§2 幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算

常数项级数

数列 $\{x_n\}$ $n \in N$

形式求和　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$

若 $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} s \\ \text{不存在} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{收敛} \\ \text{发散} \end{matrix}$

基本问题

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 敛散性

收敛级数的和 $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

函数项级数

函数列 $\{u_n(x)\}$ $n \in N$, $x \in I$

形式求和 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in I$

部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $x \in I$

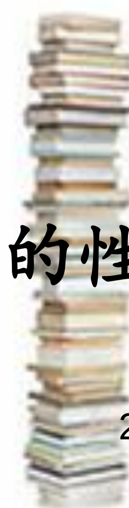
若 $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} s & x \in D \\ \text{不存在} & x \in I - D \end{cases}$

则称D为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域 D

和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的性质

和函数的初等表示



一、函数项级数的一般概念

1、函数项级数的定义

设给定一个定义在区间 I 上的函数列，

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

为定义在区间 I 上的**函数项级数**。

2、收敛点与收敛域的定义

1) 若对于固定的 $x_0 \in I$， 常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，

则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 收敛，或称

x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**收敛点**，否则 x_0 称为**发散点**。

2) 函数项级数收敛点的全体所构成的集合 D，

称为级数的**收敛域**，

所有发散点的全体集合称为**发散域**。

3、和函数

1) 在收敛域 D上, 函数项级数的和是 x 的函数,

称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数,**

记为 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad x \in D$

2) 若用 $S_n(x)$ 表示函数项级数前 n 项的和,

即 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$

若 $\forall\ x \in D \quad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 存在

则称 $S(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数。**

4、函数项级数的余项

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

结论 在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \qquad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

如等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

它的收敛域是 $(-1, 1)$，

当 $x \in (-1, 1)$时，有和函数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$，

它的发散域是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

如何求函数项级数的收敛域呢？

级数蕴涵了分解的特性。

由一个新鲜的观点和一个简单的类比开辟了一个新的研究方向。这也是高层次的创造性思维。

高等数学中的两类基函数：

整幂函数

$$u_n(x)=x^n \quad n=0,1,\cdots$$

三角函数

$$u_n(x)=\begin{cases}\sin nx & n=1,2,\cdots \\ \cos nx & n=0,1,\cdots\end{cases}$$

二、幂级数

幂级数系数

1、定义 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

任意给定的实数。

$$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为 $x - x_0$ 的幂级数。

作代换 $t = x - x_0$（$x_0 = 0$）即转换成

x 的幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

任意一个幂级数在 $x = 0$ 处总是收敛的。

下面着重讨论 x 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

对每一个实数 x_0，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 即为常数项级数。

1) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则称 x_0 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛点，

所有收敛点的全体称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区域。

2) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 发散，则称 x_0 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的发散点，

幂级数的和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$

在收敛域上是 x 的函数。

关于幂级数的研究，有两大问题：

1、求和问题 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

1）收敛域　2）收敛域内，$S(x)$ 的特性。

2、展开问题

已知某个函数空间S 以及（中心）x_0，使得

$\forall\ f(x)\in S$　有　$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

1）S 满足什么条件，才有展开式；

2）系数 a_n 计算；3）展开成立的范围。

首先要解决 x 在什么范围内取值、收敛。

2、Abel 定理

1) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 $(x_0 \neq 0)$ 点收敛，

则对 $\forall x$ 满足 $|x| < |x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

2) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 $(x_0 \neq 0)$ 点发散，

则对 $\forall x$ 满足 $|x| > |x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 也发散。

证：1) 由已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$，

即有界，$\therefore \exists M > 0$，$\ni \left| a_n x_0^n \right| \le M \quad n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = \left| a_n x_0^n \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当 $|x|<|x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛，

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 也收敛，$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

2) 反证 假设对 $\forall\, x$， $\ni |x|>|x_0|$，

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛， 由 1)

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 绝对收敛； 矛盾，

$\therefore$ 对 $\forall\, x$ 满足 $|x|>|x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 也发散。

Abel 定理给出了这样的结论:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间，即

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 点收敛,

$\Rightarrow \forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛;

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 点发散,

$\Rightarrow \forall x \in (-\infty, -|x_0|), (|x_0|, +\infty)$ 发散。

Abel 定理推论

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有以下三种收敛情况：

1）仅在 $x=0$ 收敛；

2）在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛；

3）存在 $R>0$，当 $|x|<R$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

当 $|x|>R$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散；

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时，

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛，可能发散。

称 R 为 收敛半径,

$$(-R, R),\ [-R, R),\ (-R, R],\ [-R, R]$$

为可能的 收敛区间。

若在 $x = 0$ 收敛 ， $R = 0$,

若在 $\forall x$ 点收敛，即 $(-\infty, +\infty)$ 收敛，$R = +\infty$,

关键是求收敛半径 R .

如何求收敛半径、收敛区域 ?

3、*Cauchy - Hadamard* 定理

1^0 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

如果 1) $\rho \neq 0 \quad \Rightarrow R = \dfrac{1}{\rho}$ $\quad R$ 为收敛半径,

2) $\rho = 0 \quad \Rightarrow R = +\infty$

3) $\rho = +\infty \quad \Rightarrow R = 0$

再令 $x = \pm R$ 区间的端点，代入幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，得常数项级数，用常数项级数的方法来判断其敛散性，求出收敛区间。

2^0 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$

同样可得到上述的结果。

例1、求幂级数 $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径及收敛域。

例2、求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$ 的收敛区间。

例3、求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛区间。

例4、考察幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}(x-\frac{1}{2})^n$ 的收敛情况。

三、幂级数的性质

1、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R_1，$|x|<R_1$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为R_2，$|x|<R_2$

则代数和

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{S_1(x)} \pm \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}_{S_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$|x| < R = \min(R_1, R_2)$$

2、和函数的连续性

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R ，

则和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 连续，

即对 $\forall x_0 \in (-R, R)$，$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^{\,n}$，

当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = \pm R$ 收敛时，

则和函数 $S(x)$ 在 $x = \pm R$ 左(右)连续，

即 $\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$

$\lim_{x \to -R^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$.

3、逐项可导性(求导)定理

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R，

则和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 可以逐项求导，即

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

说明

1) 求导运算与求和运算可交换次序;

2) 收敛幂级数可逐项求导，得到的仍是幂级数，且其收敛半径不变，其和函数为原级数的和函数在相应区间上的导数。

4、逐项积分定理

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R，

则和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 可以逐项积分，即

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

说明

1) 积分运算与求和运算可交换次序；

2) 收敛幂级数可逐项积分，得到的仍是幂级数，且其收敛半径不变，其和函数为原级数的和函数在相应区间上的积分。

例5、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 的和函数。

解： 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

$$\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\Big/\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=1$$

$$\therefore R=1 \quad x\in(-1,1]$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x) \quad x\in(-1,1]$$

说明

1) 逐项求导或逐项积分后，收敛半径不变，

但收敛域可能扩大或缩小。

2) 此题还得到以下结论：

(1) $$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$$

(2) $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$$

$$(3)\quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots \quad x\in(-1,1]$$

$$(4)\quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2-\cdots-\frac{1}{n}x^n-\cdots \quad x\in[-1,1)$$

例6、将 arctan$x$ 展开为x 的幂级数。

例7、求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数。

例8、证明对一切 $x\in(-1,1)$ 成立，

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \text{并求}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}.$$

注意：求幂级数的和函数或求函数的幂级数展开等一定要考虑其收敛域。

例9、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 在收敛域 $(-1,1)$ 内的和函数. 并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

5、利用幂级数性质及其和函数求常数项级数的和，

基本步骤如下：

1) 找一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$，使得 $a_n x_0^n = x_n$，

2) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域，

3) 求出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$，

4) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S(x_0)$ 其中 x_0 在收敛域内。

例10、求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 和。

内容小结

1、求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \ (a_n \neq 0)$，

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性；

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为复合式)

求收敛半径时直接用比值法或根值法,

也可通过换元化为标准型再求。

2、幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、

减、乘法运算;

2) 在收敛区间内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分。

例11、在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ 的收敛半径。

说明 比值判别法成立 $\begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}$ 根值判别法成立。

例12、求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$ 其中 $a>1$.

四、函数展开成幂级数

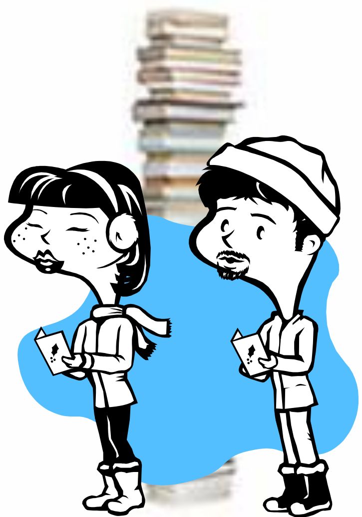
幂级数具有良好的性质。

如果函数能表示幂级数的形式，对研究函数的性质是很有效的。

解决两类问题：

在收敛域内，

$$\text{幂级数}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}} \text{和函数}\ S(x)$$



（一）Taylor 级数与余项公式

Taylor公式

函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则在该邻域内有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

定义

函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意 阶导数,

则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的在 $x=x_0$ 的 Taylor 级数,

记为 $$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

其中 $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

为 $f(x)$ 的在**点 x_0 的 Taylor 系数,**

特别，当 $x = 0$ 时，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

为 $f(x)$ 的 **Maclourin 级数。**

注意 Taylor 级数是 Taylor 多项式从有限项到无限项的推广，带来了问题：

1) 该级数在什么条件下收敛?

2) 该级数是否收敛于函数 $f(x)$?

即待解决的问题 ：

1) 对此级数, 它的收敛域是什么 ?

2) 在收敛域上 , 和函数是否为 $f(x)$?

定理1

函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有任意阶导数,

则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成 Taylor 级数,

即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 收敛

$\Leftrightarrow\ \forall x\in O(x_0,r)$ 有 $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$

称 f 为 (x_0-r,x_0+r) 上的幂级数 (Taylor) 展开。

证： $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad x\in O(x_0,r)$

收敛

令 $S_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$f(x)=S_{n+1}(x)+r_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\,f(x)-S_{n+1}(x)\right]$$

$$=0 \qquad x\in O(x_0,r)$$

定理2 若函数 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad x\in(-R,R)$$

则它一定是 $f(x)$ 的 Maclourin 级数，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ 且其展开是唯一的。

证：对 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 逐项求导得

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2!a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots2a_{n+1}x+\cdots$$

当 $x=0$ 时, 上各式为

$$a_0 = f(0),\quad a_1 = f'(0),\quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(0),\quad \cdots\cdots$$

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0),\quad \cdots\cdots$$

$$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

（二）初等函数的Taylor 展开

展开方法：
- 直接展开法 — 利用泰勒公式
- 间接展开法 — 利用已知级数其展开式的函数展开。

1、直接展开法

主要用来推导出基本初等函数的幂级数展开式。

条件：1) $f(x)$ 在 x 处有任意阶导数

2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$

验证：$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$

或该级数的和函数等于所展开的初等函数。

函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数的步骤:

1) 求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值

$$f'(0),\ f''(0),\cdots,\ f^{(n)}(0),\cdots$$

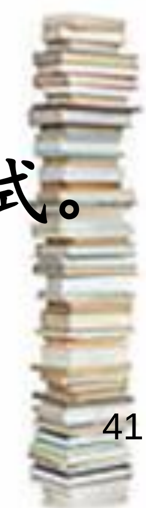
2) 写出*Maclaurin* 级数，并求出其收敛半径 R，

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

3) 判别在收敛区间$(-R, R)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) \stackrel{?}{=} 0$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$，

则 2) 求出的*Maclaurin* 级数为$f(x)$幂级数展开式。



例1、将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数。

解： e^x 在 $x=0$ 处的 *Taylor* 公式为

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+r^n(x)$$

Lagrange 余项

$$\left|r_n(x)\right|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \quad \theta\in(0,1)$$

$$\le e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$(1)\ e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例2、将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数。

解： $\sin x$ 在 $x=0$ 处的 *Taylor* 公式为

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+r_n(x)$$

$$|r_n(x)|=\left|\frac{\sin[\theta x+(2n+3)\frac{\pi}{2}]}{(2n+3)!}x^{2n+3}\right|$$

$$<\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$(2)\ \sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

类似可推出：

$$(3)\ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(4)\ (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

称为二项展开式。

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\begin{cases} x \in (-1,1) & \alpha \le -1 \\ x \in (-1,1] & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1,1] & \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$

(5) $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

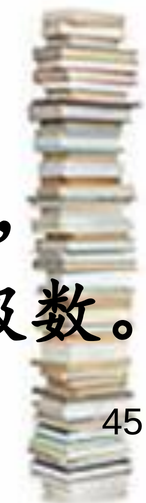
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

(6) $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$$

2、间接展开法

利用常用函数(基本初等函数）幂级数展开式，并利用幂级数运算性质把给定函数展开成幂级数。



例5、将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解： $$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \quad -1<x\le 1$$

(7) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad -1<x\le 1$$

3、常用函数 x 的幂级数 (*Taylor* 级数)展开式

例6. 求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数。

例7、求 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=3$ 的幂级数展开。

例8、将 $\dfrac{1}{2x^2-3x+1}$ 展成 x (或 $x_0=0$)的幂级数。

如果此题改成展成 $x+1$ (或 $x_0=-1$)的幂级数，

例9、将$f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$展开成 *Maclaurin* 级数。

例10、求 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在 x 的幂级数。