§6 Taylor 公式

一、问题的提出

1、设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

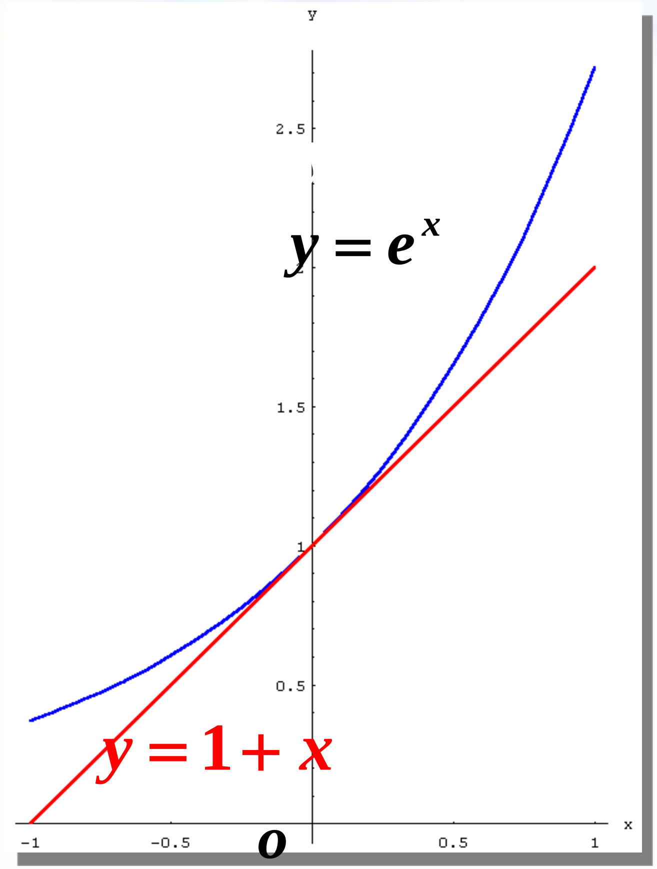
即 $f(x)=f(x_0)+\alpha \quad f(x)\approx f(x_0)$

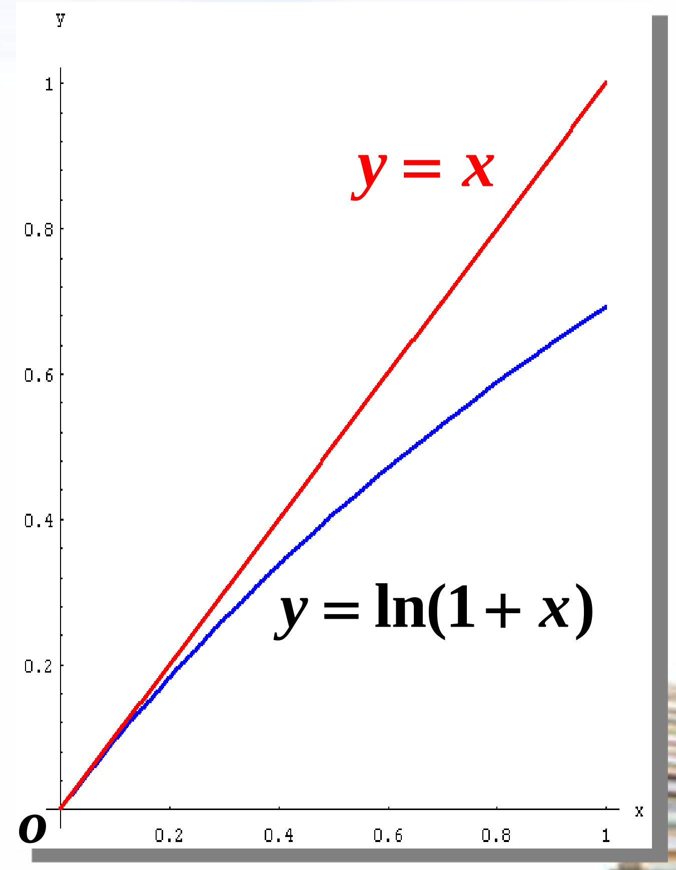
2、设 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+0(x-x_0)$$

即 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

例如，当 $|x|$ 很小时， $e^{x} \approx 1+x \quad \ln(1+x) \approx x$





精确度不高　　误差不能估计

寻找函数 $P(x)$，使得 $f(x) \approx P(x)$

且误差 $R(x) = f(x) - P(x)$ 可估计。

由于多项式是一类比较简单的函数，故往往用其近似代替复杂的函数作运算。

二、带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式

函数 f 在 x_0 处 n 阶可微，试找出一个关于 $x - x_0$ 的 n 阶多项式

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

使此多项式与 f 之差是比 $(x - x_0)^n$ 高阶的无穷小。

假设成立着：

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n)\qquad(*)$$

讨论多项式 $f(x)$ 各项的系数 a_i 与 $f(x)$ 的关系

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}[\sum_{i=0}^{n}a_i(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n)]$$

$$||\qquad\qquad ||$$

$$f(x_0)\quad=a_0$$ 代入（*）式，移项后得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{i=1}^{n}a_i(x-x_0)^{i-1}+o((x-x_0)^{n-1})$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}[\sum_{i=1}^{n}a_i(x-x_0)^{i-1}+o((x-x_0)^{n-1})]$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=a_1$$

把 a_0、a_1 代入（*）式，移项后得

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\sum_{i=2}^{n}a_i(x-x_0)^{i-2}+o((x-x_0)^{n-2})$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}[\sum_{i=2}^{n}a_i(x-x_0)^{i-2}+o((x-x_0)^{n-2})]$$

$L'Hospital$ $||$ $||$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0)=a_2$$

依此类推可得

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)\qquad k=0,1,\cdots,n$$

定理： 设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则

Taylor 系数

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\boxed{\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)}(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n)$$

称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式。

证：记 $R(x)=f(x)-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i \Rightarrow R(x_0)=0$

$$R'(x)=f'(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i-1)!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^{i-1}\Rightarrow R'(x_0)=0$$

同理可得 $R(x_0)=R'(x_0)=R''(x_0)=\cdots=R^{(n-1)}(x_0)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}\overset{L'}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{R'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\overset{L'}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{R''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

$$=\cdots\overset{L'}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n-1)}(x)-R^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}R^{(n)}(x_0)=0 \Rightarrow R(x)=o((x-x_0)^n)$$

三、带 *Lagrange* 余项的 *Taylor* 公式

定理：

设函数 f 在含 x_0 的开区间(a, b)内有 $n+1$ 阶导数，

则 $\forall x \in (a,b)$， $\exists \xi \in (x_0, x)$ ，成立

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \boxed{\frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)} (x-x_0)^i + R_n(x)$$

Taylor 系数

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

用来估计绝对误差

称为带 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处*Lagrange* 余项的 *Taylor* 公式。

四、*Maclaurin* 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$0<\xi<x$$

近似公式:

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

常用的 *Maclaurin* 公式（带 *Peana* 余项）

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

例1、求 $f(x) = \ln x$ 在 $x = e$ 点处的 *Taylor* 公式。

结合 *Taylor* 公式求极限

例2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x - x(1+x)}{x^2\tan x}$

例3、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x - x\cos x}{x^2\tan x}$