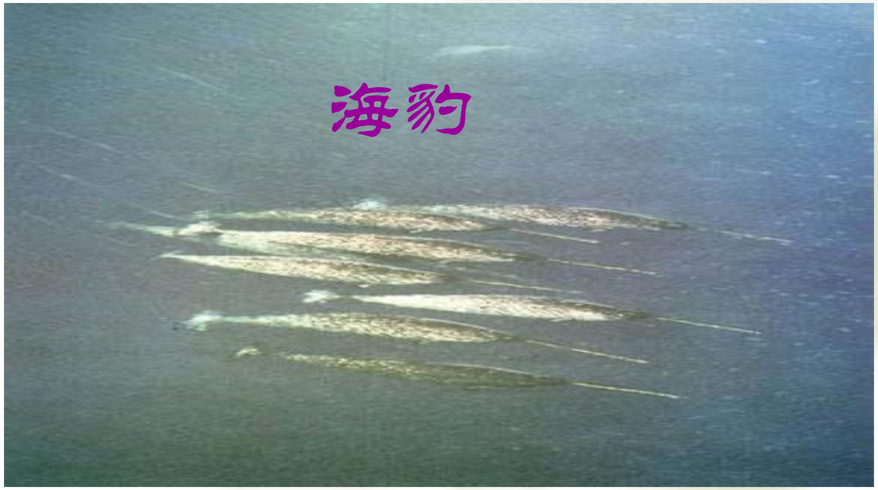
§3　函数的极限

* 数列极限是定义在正整数集上的函数当自变量趋于无穷大时的极限。
* 函数极限是定义在实数集上的函数当自变量连续地趋于某个值(有限或无限)时的极限。



一. 自变量趋于有限值时函数极限

定义: （精确的）

如果对任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，

使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时，以 A 为极限。

记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

定义: （通俗的）

设函数 f 在 $U(x_0, \delta)$ 有定义（点 x_0 可除外），

当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限地接近于常数 A，

即 $f(x)$- A 趋于 0，

则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时，以 A 为极限。

定义: （数列极限的形式）

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$$ 对任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，

其中 $x_n \neq x_0, n=1,2,\cdots$

均有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$

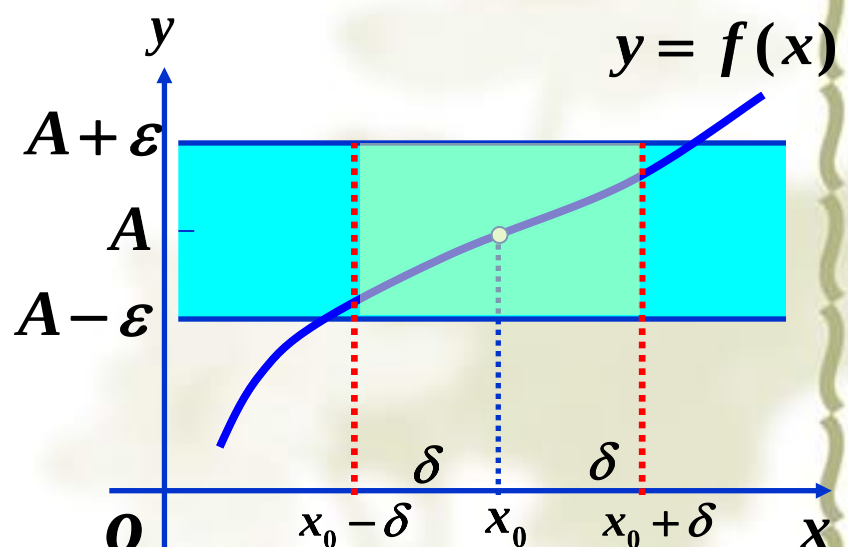
邻域的定义: 对 A 的任何 ε 邻域，存在 x_0 的某个 δ 邻域，当 x 属于该邻域而非 x_0 时，$f(x)$ 落在 A 的 ε 邻域中，也即:

对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，

当 $x\in U(x_0,\delta)$ 且 $x\neq x_0$ 时，

$f(x)\in U(A,\varepsilon)$

$$\therefore \lim_{x\to x_0} f(x)=A$$



二. 极限的性质

1、定理(极限的四则运算)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，

则：1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (只要 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$)

证明：1）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

由数列极限形式的定义得：

对 $\forall \{x_n\} \quad x_n \neq x_0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A \quad \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=B$

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_n)\pm g(x_n)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\pm\lim_{n\to\infty} g(x_n)=A\pm B$$

再由数列极限形式的定义得：

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$$

同理可证 2）、3）.

利用有限次的运算法则可求得

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i \qquad \lim_{x\to x_0}P_n(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{i=0}^{n}a_i x^i=\sum_{i=0}^{n}a_i(\lim_{x\to x_0}x^i)$$

n 次多项式

$$=\sum_{i=0}^{n}a_i x_0^i = P_n(x_0)$$

也可求得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)} \quad (\text{只要}\,Q_m(x_0)\neq 0)$$

m 次多项式

例1、求$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

例2、求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

2、夹逼性（定理）质

设对某 $r>0$，当 $0<|x-x_0|<r$ 时，

$f(x)\le g(x)\le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$

证明：$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

由数列极限形式的定义：

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)=A$

又 $\because f(x_n)\le g(x_n)\le h(x_n)$ 由数列的夹逼性

$\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=A$ 由 $\{x_n\}$ 的任意性，

及数列极限形式的定义 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$

3、有界性（定理）

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，

则 $\exists \delta > 0$，$\ni 0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

函数 $f(x)$ 有界（点 x_0 除外）.

4、保号性

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ 且 $A > B$

则 $\exists \delta > 0$，$\ni 0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > g(x)$

证：取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \quad \exists\delta_1>0 \ \ni 0<|x-x_0|<\delta_1$时

$|f(x)-A|<\varepsilon$

$\because \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B \quad \exists\delta_2>0 \ \ni 0<|x-x_0|<\delta_2$时

$|g(x)-B|<\varepsilon$

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \Rightarrow A-\frac{A-B}{2}<f(x)<A+\frac{A-B}{2}$$

$$B-\varepsilon<g(x)<B+\varepsilon \Rightarrow B-\frac{A-B}{2}<g(x)<B+\frac{A-B}{2}$$

即 $\dfrac{A+B}{2}<f(x)<A+\dfrac{A-B}{2} \quad B-\dfrac{A-B}{2}<g(x)<\dfrac{A+B}{2}$

$\therefore \ f(x)>\dfrac{A+B}{2}>g(x)$ 即 $f(x)>g(x)$

推论1 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > B$

则 $\exists\,\delta > 0,\ \ni 0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > B$

推论2 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，

且当 $0 < |x - x_0| < r$ 时，$f(x) \le g(x)$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

证明（反证法） 假设 $\underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}_{A} > \underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}_{B}$

$\therefore\ A > B$

由保号性 $\exists\, r > 0,\ \ni 0 < |x - x_0| < r$ 时，

$f(x) > g(x)$ 与条件 $f(x) \le g(x)$ 矛盾，

$\therefore\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

三. 单侧极限

1、定义: 如果存在实数A，对$\forall$给定$\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

当$x_0-\delta<x<x_0$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$

$(-\delta<x-x_0<0)$

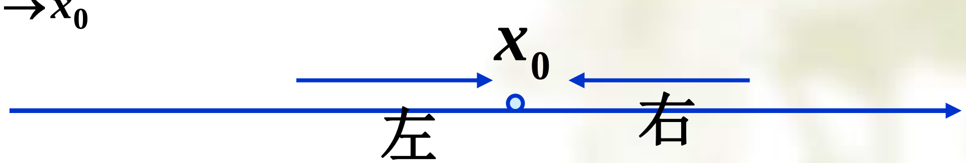
$x_0<x<x_0+\delta\quad(0<x-x_0<\delta)$

则称A为f在x_0处的左极限 $(x<x_0,x\to x_0)$

右极限 $(x>x_0,x\to x_0)$

记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\quad or\quad f(x_0-0)=A$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\quad or\quad f(x_0+0)=A$



2、极限、左右极限的关系

定理: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$

例3、对于符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, +\infty) \end{cases}$

讨论点 $x = 0$ 处的极限。

例4、求常数 a，使函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0 < x \le 1 \\ ax + 2 & x > 1 \end{cases}$

在 $x = 1$ 处的极限存在。

四、自变量趋于无穷时函数的极限

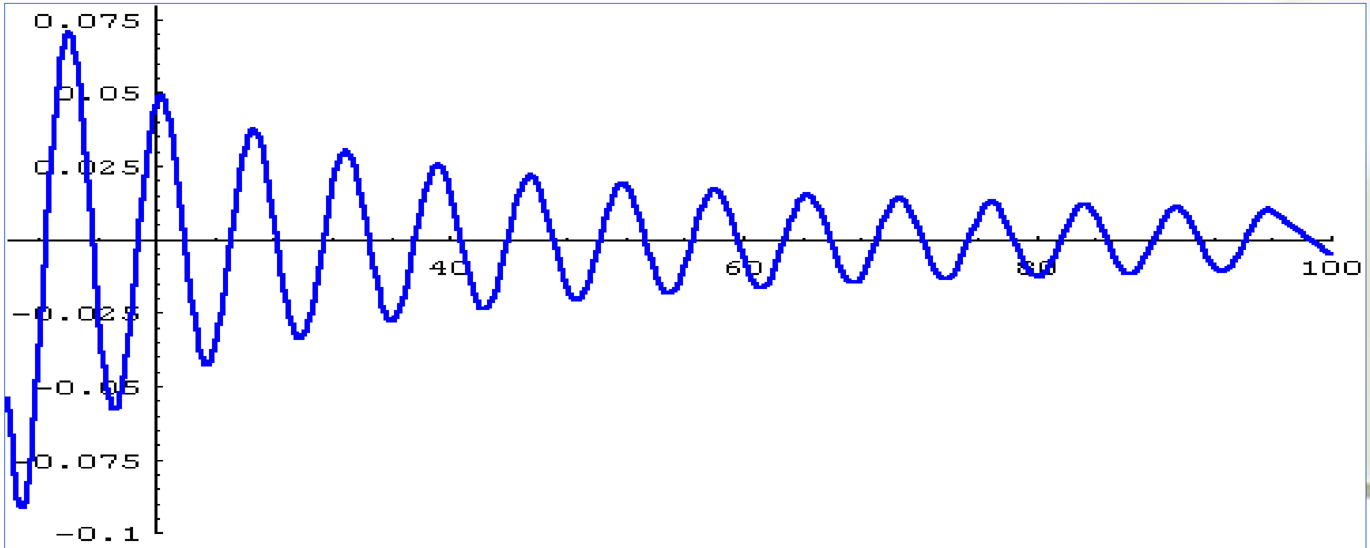
1、定义: 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0, \exists X > 0,$

当 $|x| > X$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$

则称x 趋于无穷大时，$f(x)$以A 为极限，

记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

观察函数$\dfrac{\sin x}{x}$ 当$x \to \infty$ 时的变化趋势



2、定义:

$$x \to +\infty : (x \to -\infty)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists X > 0 \ \ \ni \text{当} x > X \text{时}, \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

$$(x < -X)$$

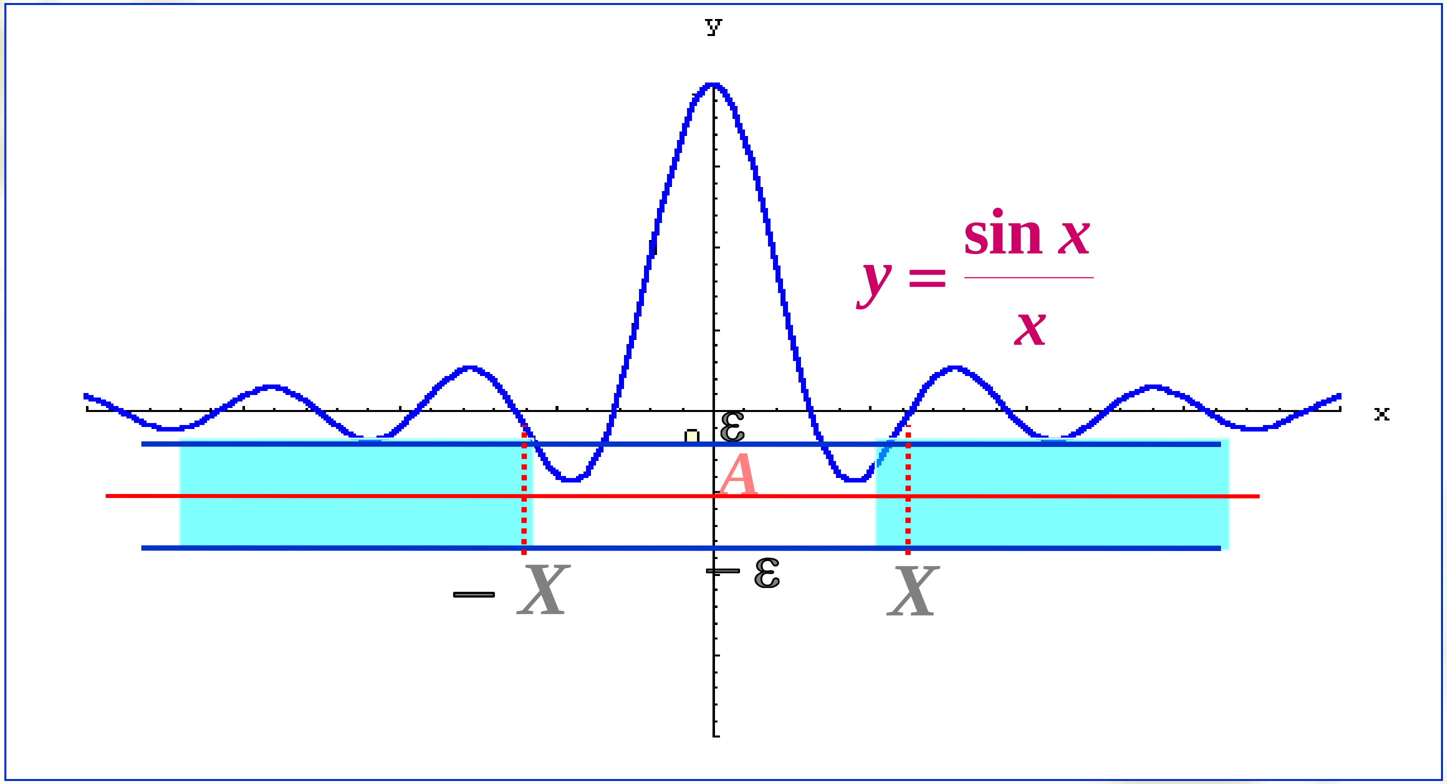
则称x趋于正无穷大时，$f(x)$以A为极限，

（负无穷大）

记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \quad (\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A)$

定理: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

3、几何解释:



当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线，宽为2ε的带形区域内。

例5、证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

例6、$f(x)=2\arctan x+\pi$ 求 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

例7、 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

五、无穷小量与无穷大量

(一)无穷小量

以零为极限的变量称为无穷小量。

对于函数： 若 $\lim\limits_{x\to(\,)}\alpha(x)=0$

则称在相应的变化过程中，$\alpha(x)$为无穷小量。

1、定义

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ (\exists X>0),$ 当$0<|x-x_0|<\delta$

$(|x|>X)$

$\ni|\alpha(x)|<\varepsilon,$

则称 $\alpha(x)$ 当$x\to x_0$（当 $x\to\infty$）时的无穷小量

记作 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ $(\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0)$

2、无穷小量与函数极限的关系

定理：$\lim\limits_{x \to ()} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to ()$ 时的无穷小量

3、无穷小量的运算性质

1）有限多个无穷小量的代数和是无穷小量；

无穷多个无穷小量的代数和是如何呢？

2）有界量与无穷小量的乘积是无穷小量；

3）两个无穷小量的乘积是无穷小量；

（可推广到有限多个）

思考： 两个无穷小量之比将会出现什么情况？

（二）无穷大量

是个绝对值无限增大(趋于∞)的变量(变化趋势)

对于函数：

$\forall M>0$（无论多么大），总 $\exists\delta>0$ $(\exists X>0)$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ $(\exists |x|>X)$

$\ni |f(x)|>M$

则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（当 $x\to\infty$）时的无穷大量

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty)$

正无穷大量

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$$

负无穷大量

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$$

(三) 无穷小量与无穷大量的关系

定理:

$$\lim_{x\to()} f(x)=0\ (f(x)\neq 0) \Leftrightarrow \lim_{x\to()}\frac{1}{f(x)}=\infty$$

意义: 关于无穷大量的讨论都可归结为无穷小量的讨论。

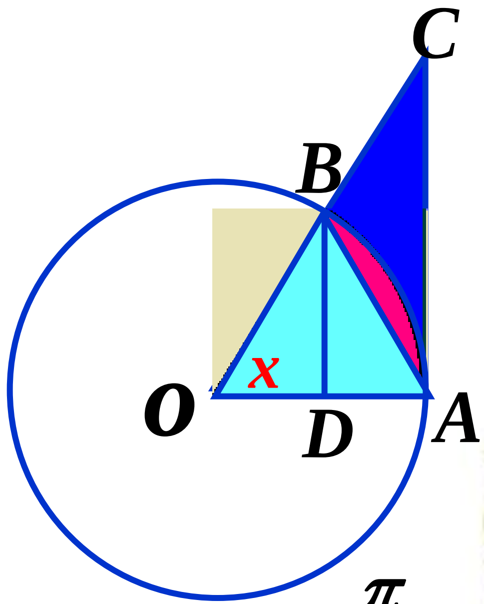
结论:

当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, m 和n 为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & \text{当} n = m \\ 0 & \text{当} n > m \\ \infty & \text{当} n < m \end{cases}$$

六. 两个重要极限

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



证明： 函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 对于一切 $x\neq 0$ 都有

定义，作单位圆，记圆心角 $\angle AOC = x\,(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$

作点A 的切线，得ΔAOC. 扇形AOB 的圆心角为

x，ΔAOB的高为BD，

$\therefore\ \sin x = BD$， $x = AB$， $\tan x = AC$，

又$\because \Delta AOB <$ 扇形$AOB < \Delta AOC$

即 $\dfrac{1}{2}OA\cdot BD < \dfrac{1}{2}OA\cdot AB < \dfrac{1}{2}OA\cdot AC$

$\therefore \sin x < x < \tan x$

两边除以 $\sin x\,(>0)$: $\dfrac{\sin x}{\sin x} < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{\tan x}{\sin x}$

即 $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ $\therefore \cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1 \qquad (*)$

上式对于 $x \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0)$ 也成立;

再证 $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ $\because \forall x \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \dfrac{\pi}{2})$

有 $0 < 1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \le 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{2} \to 0\,(x \to 0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad x \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \dfrac{\pi}{2})$

结论：$\lim\limits_{(\ )\to 0}\dfrac{\sin(\ )}{(\ )}=1$

注意：（）中的变量、函数必须相同且为无穷小量。

例8：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

例9：求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

例10：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$

例11：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

2、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

证：1）先证 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

对于$\forall$正实数 x，有$[x]\le x<[x]+1$

当$x\ge 1$时，$\frac{1}{[x]+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{[x]}$

即 $(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 得

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}=e$$

同理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}(1+\frac{1}{[x]})=e$

由夹逼性得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

2）再证 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

令 $y=-x$ 　当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$

$$(1+\frac{1}{x})^x=(1-\frac{1}{y})^{-y}=(\frac{y}{y-1})^y=(1+\frac{1}{y-1})^y$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^y$$

$$=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}(1+\frac{1}{y-1})=e$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e \quad or \quad \lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e \quad (y=\frac{1}{x})$$

结论: $\lim\limits_{(\,)\to\infty}\left[1+\frac{1}{(\,)}\right]^{(\,)}=e$

注意:（）中的变量、函数必须相同且为无穷大量。

例12：求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x})^{2x}$

例13：求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{3}\right)^{\frac{6}{x^2}}$

例14：求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x+2})^{x}$

综合练习

1、设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{f(2x)}$.

2、求 $\lim\limits_{t\to\infty}x\left(\dfrac{t-x}{t+x}\right)^{t}$

3、求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

4、求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+4\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}{\sqrt{x+3}}$

5、问当 $x\to3$时，下列函数极限是否存在？

$$f(x)=\frac{3+e^{\frac{1}{x-3}}}{1+3e^{\frac{2}{x-3}}}+\frac{|\sin(x-3)|}{x-3}$$