§5 反常积分

Rieman 积分限于处理有限区间上的有界函数，而如果问题涉及无穷区间或无界函数时，就需要把积分概念扩充，这就引出了反常积分。

一、无穷限的反常积分

定义1 设函数 f 定义于 $[a,+\infty)$，且在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积，如果 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分。记为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

且称此反常积分收敛，否则称为发散。

定义2 设函数 f 定义于 $(-\infty, b]$，且在任意有限区间 $[a, b]$ 上可积，如果 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的**反常积分**。记为 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

且称此反常积分收敛，否则称为发散。

定义3 设函数 f 定义于 $(-\infty, +\infty)$，如果 f 在 $(-\infty, a]$，$[a, +\infty)$ 上的反常积分均收敛，则称 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上**反常可积**（收敛）．记为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

且称此反常积分收敛，否则称为发散。

例1、计算反常积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$.

例2、计算反常积分 $\int_0^{+\infty}te^{-pt}dt$（$p>0$ 的常数）.

例3、讨论反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 的敛散性。

解：当 $p\neq 1$ 时，

$$\text{原式}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & p>1\\ +\infty & p<1\end{cases}$$

当 $p=1$ 时，

$$\text{原式}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$$

$\therefore$ 当且仅当 $p>1$ 时，

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛，且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}$；

当 $p\leq 1$ 时，此反常积分发散。作为结论。

说明 一般地，设 f 在 $[a,+\infty)$ $(-\infty,b]$ $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分收敛，F 是 f 的一个原函数，则由反常积分和 *Newton-Leibniz* 公式得：

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(-\infty)$$

例4、计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

例5、计算反常积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+2x^2+2x^4}} dx$.

二、比较判别法

对原函数在区间端点的值取极限以确定反常积分的敛散性，在许多问题中并不可行。这是因为原函数不是初等函数的形式是经常发生的。那么是否直接根据被积函数的形式来判定反常积分的敛散性呢?

下面介绍反常可积性时最常使用的比较判别法：

定理 （比较判别法）

设 f 和 g 均是$[a,+\infty)$上的函数，且在任何有限区间 $[a, b]$ 上可积。

如果 $|f(x)| \leq g(x) \quad x \in [a,+\infty)$

则当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 均收敛；

当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时，

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$，$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 均发散。

例6、讨论反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos^{3}x}{x\sqrt{1+x}}dx$ 的敛散性。

定理 （极限审敛法）

设函数 f 在$[a,+\infty)$上有定义（$a>0$），且在任何有限区间 $[a,A]$ 上可积。

1) 如果 $\exists\, p>1$， $\ni \lim\limits_{x\to+\infty} x^p\left|f(x)\right|=C\geq 0$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ 均收敛；

2) 如果 $\exists\, p\leq 1$， $\ni \lim\limits_{x\to+\infty} x^p\left|f(x)\right|=C>0$ (或$+\infty$)

则 $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$发散。

说明 1) 如果 $f(x)\geq 0$，$\exists\, p>1$，

$\ni \lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=C\geq 0$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

2) 如果 $f(x)\geq 0$，$\exists\, p\leq 1$，

$\ni \lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=C>0$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

例7、讨论反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+2} \arcsin \frac{1}{x^2} dx$

例8、判别反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ 的敛散性。

例9、判别反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 的敛散性。

二、无界函数的反常积分

定义1 对 $\forall \varepsilon > 0$，函数 f 在 $(a, a+\varepsilon)$ 中无界，在$[a+\varepsilon, b]$上可积，且 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在，则称此极限为 f 的反常积分，记为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

此时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；否则，称相应的反常积分发散。

定义2 对 $\forall \varepsilon>0$，函数 f 在 $(b-\varepsilon, b)$ 中无界，在 $[a, b-\varepsilon]$ 上可积，且 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 存在，则称此极限为 f 的**反常积分**，记为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

此时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；否则，称相应的反常积分发散。

定义3 如果 $a<c<b$，函数 f 在 $U(c)$ 中无界，但 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 均收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

否则，称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

例10、计算反常积分 $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

例11、讨论反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 的敛散性。

解：当 $p \neq 1$ 时，

$$原式 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & p<1 \\ +\infty & p>1 \end{cases}$$

当 $p = 1$ 时，

$$原式 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\ln\varepsilon) = +\infty$$

$\therefore$ 当 $p<1$ 时，$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 收敛；

当 $p \geq 1$ 时，$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 发散。作为结论。

定理 （比较判别法）

设函数 f 和 g 均在任何 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积，

其中 $\varepsilon > 0$ ， 在 a 点附近无界，且 $|f(x)| \le g(x)$,

则当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，

$$\int_a^b f(x)dx\,,\quad \int_a^b |f(x)|dx \text{ 均收敛；}$$

则当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时，

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx\,,\ \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ 均发散。}$$

定理 （极限审敛法）

设函数 f 在任何区间 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积，其中 $\varepsilon > 0$，

1) 如果 $\exists\, p < 1$，$\ni \lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p\left|f(x)\right| = C \geq 0$

则 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b \left|f(x)\right|dx$ 均收敛；

2) 如果 $\exists\, p \geq 1$，$\ni \lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p\left|f(x)\right| = C > 0$ (或 $+\infty$)

则 $\int_a^b \left|f(x)\right|dx$ 发散。

说明 1) 如果 $f(x) \geq 0$，$\exists\, p < 1$，

$\ni \lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) = C \geq 0$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

2) 如果 $f(x) \geq 0$，$\exists\, p \geq 1$，

$\ni \lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) = C > 0$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

例12、判别反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 的敛散性。

解：原式 $=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$

当 $p>1$ 时收敛，

$$\because \lim_{x\to 0^+}(x-0)^{p-1}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^p}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$\therefore$仅当 p-$1<1$ 时，即 $p<2$ 时，$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}$ 收敛；

综上所述仅当 $1<p<2$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}$$ 收敛。

说明

1）定积分的一系列运算法则，同样适用于反常积分；

2）有时通过变量代换，可以把反常积分化为有限积分计算，使其更容易。

例13、计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

例14、计算反常积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}$

例15、计算 Euler 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$.

综合练习

1、计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2} dx$.

2、计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

3、讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}} dx$ 的敛散性。

4、求曲线 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 绕其渐进线旋转所得的旋转体体积。