§2 不定积分

显然微分（或导数）逆运算的问题就是：

找一个还函数 $y=F(x)$，$\ni F(x)$ 的导数

$F'(x)=f(x)$

已知函数

一、不定积分的概念

1、不定积分的定义：

函数 $f(x)$ 的原函数全体称为$f(x)$ 的不定积分。

记作 $\int f(x)dx=F(x)+C$

积分常数

$$F(x)\ \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}\ f(x)$$

微分运算与不定积分的运算是互逆的.

2、不定积分法（积分法）：

求 $f(x)$ 的不定积分，只需求一个原函数 $F(x)$，然后加任意常数 C 即可。这种求已知函数的原函数全体的方法，称为不定积分法。

例1、求 $\int x^4 dx$

解：$\because \left(\dfrac{x^5}{5}\right)' = x^4 \quad \therefore \int x^4 dx = \dfrac{x^5}{5} + C$

例2、求 $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx$

解：$\because \quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

例3、设曲线通过点 (2, 1)， 曲线上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的三倍，求此曲线方程。

解： 设曲线方程为 $y = f(x)$ ，

$\because \dfrac{dy}{dx} = 3x$ 即 $f(x)$ 是$3x$ 的一个原函数

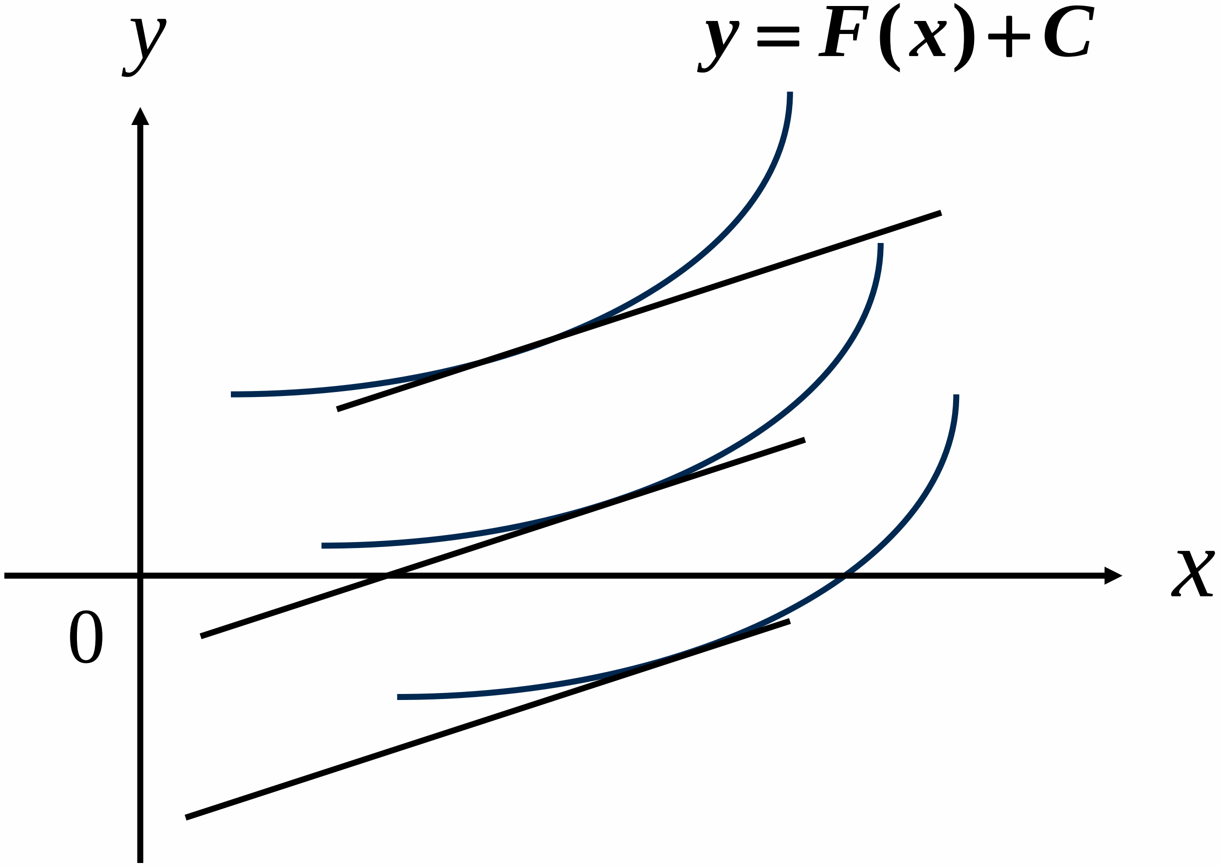
又 $\because \int 3x dx = \dfrac{3}{2}x^2 + C \quad \therefore f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + C$

$\because (x, y) = (2, 1) \quad \Rightarrow C = -5$

$\therefore$所求曲线方程为 $y = \dfrac{3}{2}x^2 - 5$

不定积分的几何意义：

一族积分曲线 $y = F(x) + C$



3、基本积分公式:

由基本求导公式及不定积分的定义直接推出。

基本积分表

(1) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

(2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(3) $\int a^{x}dx = \dfrac{1}{\ln a}a^{x} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

特别地 $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(6) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(7) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(8) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(9) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(11) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

(12) $\int shx dx = chx + C$

(13) $\int chx dx = shx + C$

4、不定积分的性质:

1) $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$　　$d[\int f(x)dx] = f(x)dx$

$\int f'(x)dx = f(x) + C$　　$\int df(x) = f(x) + C$

2) 设函数 f 和 g 的原函数都存在，α、β是两个常数，

则 $\int[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$

证：设 $\int f(x)dx = F(x) + C$　$\int g(x)dx = G(x) + C$

$\Rightarrow F' = f,\ G' = g. \Rightarrow (\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$

$\Rightarrow \int[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$

$= \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$

例4、计算 $\int(\sqrt{x}+2)(x-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

例5、计算 $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$

例6、计算 $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

例7、计算 $\int 2^x e^x dx$

说明：以上几例被积函数都需要进行适当的变形，才能使用基本积分表。

思考题 符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否存在原函数？为什么？

二、换元积分法

问题 $\int \cos 2x dx \stackrel{?}{=} \sin 2x + C$

解决方法 利用复合函数，设置中间变量。

过程 令 $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

在一般情况下：

设 $F'(u)=f(u)\Rightarrow\int f(u)du=F(u)+C$

如果 $u=\varphi(x)$ 可微

$\because\ dF[\varphi(x)]=F'[\varphi(x)]d[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

$\therefore\ \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$

$$=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

由此得到第一类换元法的定理

定理 设 $\int f(u)du = F(u) + C$， φ是可微函数

则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

$$= \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C$$

为**第一类换元公式**（凑微分法）.

实质 $\int g(x)dx$凑成某一已知函数的微分形式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \quad or \quad \int f[\varphi(x)]d(\varphi(x))$$

以便用基本积分公式求得积分。

例8、计算 $\int (3x+2)^8 dx$

例9、计算 $\int x\sqrt{4-x^2}dx$

例10、计算 $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{3\sqrt{x}} dx$

例11、计算 $\int \frac{1}{1-x^2} dx$

同理：$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

可作为一般的常用积分公式

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$$

可作为一般的常用积分公式

例12、计算 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$

例13、计算 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$

解： $$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{\frac{1}{a^2}}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

可作为一般的常用积分公式

例14、计算 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx$

例15、计算 $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

解：$\int \frac{1}{1+e^x}dx$

(1) $= \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = \cdots$

(2) $= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \cdots$

例16、计算$\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx$

解：原式$=\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx=\cdots$

注意：

一般地，形如$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$不定积分的方法

例17、计算$\int \frac{x}{x^2-2x-3}dx$

例18、计算 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

解：原式 $= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} d\left(\frac{x}{a}\right)$

$= \arcsin \frac{x}{a} + C$ 可作为一般的常用积分公式

例19、计算 $\int \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx$

例20、计算 $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + x)} dx$

注意：

利用第一类换元法（凑微分）求不定积分是常用的方法，但需要一定的技巧，如：

- 同加、减一项；
- 同乘、除一个非零代数式；
- 拆项等。

且需要选择适当的变量代换，这就要多练习，熟能生巧。

三、第二类换元法

问题 $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = ?$$

解决方法 变量代换方法

过程 令 $u=\sqrt{x}$ $\quad x=u^2 \quad \Rightarrow dx = 2udu$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+u}2udu = \cdots$$

再应用凑微分及积分公式即可求出

定理 设函数 g 连续，φ 具有连续导数，φ^{-1}存在且可导，而且$\int g[\varphi(u)]\varphi'(u)du = G(u)+C$

则 $\int g(x)dx = G[\varphi^{-1}(x)]+C$

证明：$\because \int g[\varphi(u)]\varphi'(u)du = G(u)+C$

$\Rightarrow G'(u) = g[\varphi(u)]\varphi'(u)$ $\therefore$对 $u=\varphi^{-1}(x)$

$$\frac{d}{dx}G[\varphi^{-1}(x)] = G'(u)\frac{du}{dx} = g[\varphi(u)]\varphi'(u)\frac{du}{dx}$$

$$= g[\varphi(u)]\frac{dx}{du}\frac{du}{dx}$$

$$= g[\varphi(u)] = g(x)$$ 即证。

实质　一开始便对 $\int g(x)dx$ 作变量代换，使其简化。

由此得到，第二类换元积分法公式：

$x=\varphi(u)$ 变量代换

$$\int g(x)dx \overset{\downarrow}{=} \int g[\varphi(u)]\varphi'(u)du$$

用积分公式

$$\downarrow$$

$$=G(u)+C$$

$u=\varphi^{-1}(x)$

$$\overset{\downarrow}{\underset{\uparrow}{=}} G[\varphi^{-1}(x)]+C$$

变量代回

例21、计算$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$

解：令 $x=t^6$ $=\cdots$

注意：当被积函数含有两个或两个以上的

$\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可设 $x=t^n$（n 为最小公倍数）.

例22、计算 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx$

解：当分母变量的幂较高时，可设 $x=\frac{1}{t}$ 倒代换,

$=\cdots$

例23、计算 $\int \sqrt{e^x - 1}dx$

换元法解决被积函数中含有三角函数的、或在计算中需三角代换的例子。

例24、计算 $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

说明： 当被积函数含有 $\sin^m x\cos^n x$ 时，

1）当m 、n 中至少有一个为奇数时，

$$\int \sin^m x\cos^n x dx = \int \sin^m x\cos^{2k+1} x dx$$

$$= \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k d(\sin x)$$

关于 $\sin x$ 的多项式

2）当m 、n 都是偶数时，可降低次数，

1）2）均是使被积函数与积分变量成为同名函数的方法。

例25、计算 $\int \frac{\tan^2 x}{1-\sin^2 x} dx$

例26、计算 $\int \tan x dx$

解：原式 $=\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x)$

$= -\ln|\cos x| + C$　可作为常用积分公式

同理 $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

可作为常用积分公式

例27、计算 $\int \sec x dx$

解：1）原式$=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

2）原式$=\int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx$

$$=\int \frac{d(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}$$

$$=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

可作为常用积分公式

同理 $\int \csc x dx=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$

说明：以下几例均使用三角代换消去根式。

当被积函数中含有（一般规律如下）

1) $\sqrt{a^2-x^2}$

令 $x=a\sin t,\ -\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2},\Rightarrow\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$

2) $\sqrt{a^2+x^2}$

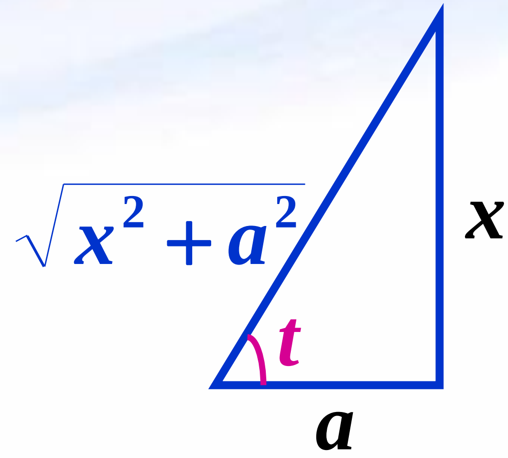
令 $x=a\tan t,\ -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2},\Rightarrow\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$

3) $\sqrt{x^2-a^2}$

令 $x=a\sec t,\ \ t\in(0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\pi,\dfrac{3}{2}\pi),$

$\Rightarrow\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$

例28、计算 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0)$



解：令 $x = a\tan t \Rightarrow dx = a\sec^2 t dt$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{1}{a\sec t} \cdot a\sec^2 t dt$$

$$= \int \sec t dt = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C'$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C'$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

可作为常用积分公式

例29、计算 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0)$

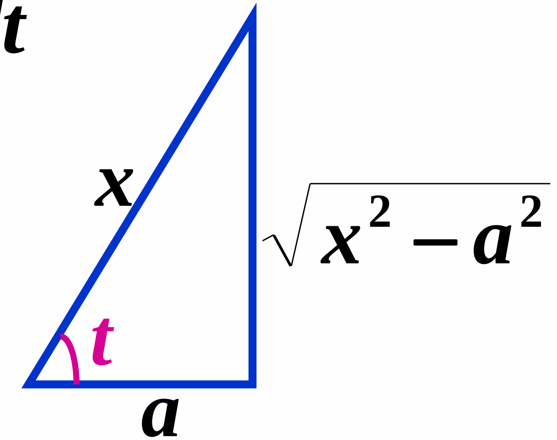
解：令 $x = a\sec t \qquad dx = a\sec t\tan t dt$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{a\sec t \cdot \tan t}{a\tan t}dt = \int \sec t dt$$

$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C'$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C'$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$



可作为常用积分公式

例30、计算 $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+6x+5}}dx$

例31、计算 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \quad (a>0)$

解：原式 $\underset{dx=a\cos t dt}{\overset{(1)\,x=a\sin t}{=\!=\!=}}$ $\cdots$

说明：积分中为了去掉根式不一定都采用三角代换，需根据被积函数的情况来定。

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \overset{(2)}{=} \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x\cdot x^3}dx = \cdots$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \;\overset{(3)\,x=\frac{1}{t}}{\underset{dx=-\frac{1}{t^2}dt}{=}}\; \cdots$$

思考题　计算 $\int (x\ln x)^p(\ln x+1)dx$

四、分部积分法

问题 $\int x^2 e^x dx = ?$

解决思路 利用函数乘积的求导法则。

设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是连续的导函数，

则 $$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$$

即 $$\int udv = uv - \int vdu$$ 为分部积分公式。

证：$\because (uv)' = u'v + uv'$

$\therefore uv' = (uv)' - u'v$

$\Rightarrow \int uv'dx = uv - \int vu'dx$ 即证。

意义

步骤 1）将积分 $\int f(x)dx \overset{化为}{=} \int udv$

2）利用分部积分公式求 $\int udv$

例32、计算 $\int x^2e^xdx$

说明： 分部积分法的关键在于能否正确地选择 u 与 dv.

例33、计算 $\int x\ln xdx$

例34、计算 $\int e^x \sin x dx$

例35、计算 $\int \arcsin x dx$

例36、计算 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

说明：选择u与v的一般规律如下：

1) $\int x^n e^{\alpha x}dx$，$\int x^n \sin\alpha x dx$，$\int x^n \cos\alpha x dx$等形式

一般设$u = x^n$，

而 $dv = e^{\alpha x}dx$、$\sin\alpha x dx$、$\cos\alpha x dx$.

2) $\int x^n \ln x dx$，$\int x^n \arcsin x dx$，$\int x^n \arctan x dx$ 等

一般设 $u = \ln x$、$\arcsin x$、$\arctan x$ 等

而 $dv = x^n dx$.

3) $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$，$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$

两者都可选作u .

例37、计算 $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$

例38、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2}，求 $\int xf'(x)dx$.

例39、计算 $\int xf''(x)dx$

例40、计算 $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$

五、有理函数的积分

定义： 凡形如 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$（$P(x)$、$Q(x)$ 为二个多项式）的函数称为**有理函数**。

说明： 有理函数的原函数是由有理函数、对数函数和正切函数组成的初等函数。

设 $P(x)$ 为 m 次多项式，记为 $P_m(x)$，
设 $Q(x)$ 为 n 次多项式，记为 $Q_n(x)$，

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ 即为 } \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

假定分子与分母没有公因式，

1）$m < n$，此有理函数为真分式；

2）$m \geq n$，此有理函数为假分式。

任何一个假分式都可化成一个多项式和一个真分式之和。

因此，有理函数不定积分的关键是真分式分式之的积分。

下面讨论真分式的不定积分：

假设 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式，分解为：

1）若$Q(x)$ 有一个k 重实根 α ，则可分解为：

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

$A_1, A_2, \cdots, A_k$为待定系数；

2）若$Q(x)$ 有一对k 重共轭复根 α, β.

即$Q(x)$ 必有因子$(x^2+px+q)^k$

其中 $p^2-4q<0$ ，则分解为

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$$

其中B_i、C_i $(i=1,2,\cdots,k)$为待定系数，

当 $k=1$ 时，分解为 $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$

例41、计算 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$

例42、计算 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

说明 1. 部分分式方法虽然普遍适用于有理函数的积分，但计算量大，应灵活运用；

2. 有理函数化为部分分式后，只出现下列三类情况：

$a)$ 多项式　　$b)$ $\frac{A}{(x-a)^k}$　$k \geq 1$

$c)$ $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$　$k \geq 1$

讨论积分 $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}dx \quad (p^2-4q<0)$

$\because \; x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$

令 $x+\frac{p}{2}=t$ 　记 $a^2=q-\frac{p^2}{4}$

则 $x^2+px+q=t^2+a^2 \quad Bx+C=Bt+b \quad b=C-\frac{Bp}{2}$

$$\therefore \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}dx$$

$$=\int \frac{Bt}{(t^2+a^2)^k}dt+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^k}dt$$

凑微分求得　　　　以下讨论

1）当 $k=1$ 时，由基本积分公式可解；

2）当 $k>1$ 时，

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\underbrace{\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}dt}_{I_{k-1}}-\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[I_{k-1}+\frac{1}{2(k-1)}\int td\left(\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{k-1}+\frac{1}{2a^2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right]$$

$$\therefore I_k=\frac{t}{a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}$$

即得到计算 I_k 的递推公式，由 I_1 求得 $I_2\ldots I_k$.

六、某些无理函数的积分

讨论类型 $R(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}})$, $R(x, \sqrt[n]{ax^2+bx+c})$,

解决方法 变量代换去掉根号。

例43、计算 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}dx$

例44、计算 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{8x^2+2x-1}}$

七、三角函数有理式的积分

三角有理式的定义：

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数。记为 $R(\sin x, \cos x)$

一般采用万能置换化为有理函数的积分。

万能置换公式

令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ $\quad x=2\arctan t$

$$\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

例45、计算 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$

说明 从上例可知，万能代换虽“万能”，但计算复杂。故三角有理式的计算中先考虑其它方法。

例46、计算 $\int \frac{\cos^2 x}{2-\sin^2 x}dx \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

例47、计算 $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+2\cos x}dx$

说明

1）不定积分的一些基本方法和技巧，要熟能生巧，它是积分学的重要基础。

2）初等函数的集合对求导运算是封闭的，即即求导后仍为初等函数；但不定积分的运算不封闭，即许多初等函数的原函数并非初等函数。

例如：$\dfrac{\sin x}{x}$ $\dfrac{1}{\ln x}$ 等。

综合练习：

1、设 $f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ x+1 & 0\le x\le 1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$，求 $\int f(x)dx$.

2、计算 $\int \dfrac{x-1}{2-4x+4x^2}dx$

3、计算 $\int \dfrac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

4、计算 $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx$

5、计算 $\int \dfrac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}dx$

6、设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf'(x)dx$.