§3 随机变量

一、随机变量的概念

直观意义： 用数值来描述随机试验的结果，即每一个试验结果对应一个数，依随机试验的结果而取值的变量为随机变量。用大写的 X、Y ... 或小写的 ξ、$\eta \cdots$ 等表示。

定义： 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，如果对于每一个样本 $\omega \in \Omega$ ，都有唯一的实数值 $X(\omega)$ 与之对应，则称实值变量 $X(\omega)$ 为一随机变量，简记为 X（一般用大写 X 、Y ... 或小写 ξ、$\eta \cdots$ ）.

注意：

1）随机变量是定义在样本空间上的实值集函数，与微积分中讨论的实函数有本质的区别。

2）随机变量是随机事件的数量化。即每个事件都可以用一个随机变量来描述。

3）引入随机变量的重要意义。

例如：抛硬币试验：规定正面向上事件以 1 表示，反面向上事件以 0 表示。在 E 中，$\Omega=\{0,1\}$，定义在 Ω 上的随机变量 ξ，它只能取值 1 或 0，则

$$P(\xi=0)=\frac{1}{2} \qquad P(\xi=1)=\frac{1}{2}$$

二、随机变量的分布函数

定义： 设 ξ 是一个随机变量，x 是任意实数，则称函数

$F(x)=P\{\xi\le x\}$ 为 ξ 的**分布函数**。

注意： 定义中的 $\{\xi\le x\}$ 表示事件“随机变量取值不大于 x ”

随机变量的分布函数 $F(x)$ 是以事件 $\{\xi\le x\}$ 的概率定义的函数，它是自变量 x 的取值在 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个普通函数，其值域为 $[0,1]$.

分布函数 $F(x)$ 具有如下性质：

1） $0 \le F(x) \le 1$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

2） $F(x)$ 单调不减，即若 $x_1 < x_2$ ，则有 $F(x_1) \le F(x_2)$

3） $F(x)$ 右连续，$\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

4） $P\{x_1 < \xi \le x_2\} = P\{\xi \le x_2\} - P\{\xi \le x_1\}$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$

三、随机变量的概率分布

设 ξ 是随机变量，则它的取值规律（即可能取哪些值，取这些值的概率分别是多少？）称为 ξ 的**概率分布**（简称分布），通常用分布律或分布密度来描述分布。随机变量的概率分布，完全描述了随机变量的统计规律和各种特征。

随机变量的分类

随机变量
- 离散型随机变量
- 连续型随机变量
- 混合型随机变量
- 奇异型随机变量

四、离散型随机变量及其概率分布

1、**定义**：若随机变量 ξ 的取值是有限的或可数的，

则称 ξ 为**离散型随机变量**。

2、**离散型随机变量的概率分布（函数）或分布律**

设离散型随机变量 ξ 的所有可能取值 $x_k\ (k=1,2,\cdots)$，

事件 $\{\xi = x_k\}$ 的概率为 $P\{\xi = x_k\} = p_k\ (k=1,2,\cdots)$，

这里 $0 \le p_k \le 1$，且 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

则称 $P\{\xi = x_k\} = p_k\ (k=1,2,\cdots)$ 为随机变量 ξ 的**概率分布（函数）或分布律**。通常用表格形式表示：

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

注意：定义中的 p_k 一定满足 $0 \le p_k \le 1$ ，且 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ，

是离散型随机变量的概率函数必须具备的性质。

即凡满足这两个条件的函数 $P\{\xi = x_k\} = p_k \ (k = 1, 2, \cdots)$

一定是某个离散型随机变量的分布律。

3、离散型随机变量的分布函数

分布式为 $P\{\xi = k\} = p_k \ (k = 1, 2, \cdots)$ 的离散型随机变量

ξ 的分布函数为：

$$F(x) = P\{\xi \le x\} = \sum_{x_k \le x} P(\xi = x_k) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1 & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} p_i & x_k \le x < x_{k+1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x \ge x_n \end{cases}$$

其中求和是对所有满足不等式

$x_k \le x$ 的 k 求和。

例1、将三个小球随机地投入四个盒子，以 ξ 表示盒子球的最大数目，求 ξ 的分布律及 $P\{\xi \le 2\}$.

例 2、设10 件产品中恰好有2 件次品，现接连进行非还原抽样，直到取到正品为止。

求：1）抽样次数 ξ 的分布；2）ξ 的分布函数；

3）$P\{\xi = 3.5\}$ ，$P\{\xi > -2\}$，$P\{1 < \xi < 3\}$.

4、常见的离散型随机变量分布有：

1）0-1 分布（二点分布）

设随机试验中事件 A 发生的概率为 p ，

令 $\xi = \begin{cases} 1 & \text{若} A \text{ 发生} \\ 0 & \text{若} A \text{ 不发生} \end{cases}$

则 ξ 服从两点分布，分布律为：

$$P\{\xi = 1\} = p$$

$$P\{\xi = 0\} = 1 - p = q$$

$$0 < p, q < 1$$

应用：凡试验只有两个结果，常用 0-1 分布。

如：

2）二项分布 $B(n, p)$

二项分布产生于 n 重 Bernoulli 试验，即在 n 重Bernoulli 试验中，事件A 每次发生的概率为 p ，不发生（ $\bar{A}$发生）的概率为 1-p ，则 n 次实验中 A 发生的次数 ξ 服从二项分布，记为 $\xi \sim B(n, p)$ ，其分布律（即概率分布）：

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

其中 $0 < p < 1$ ，且

$$\sum_{k=0}^{n} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

一般适用于

例3、独立射击 5000 次，命中率为 0.001，

求：命中次数不少于一次的概率。

启示： 小概率事件虽不易发生，但重复次数多了，

就成大概率事件。

思考：最可能命中次数及相应的概率？

3）Poisson 分布 $P(\lambda)$

其分布律（概率分布）：

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \quad \lambda > 0$$

即 $\xi \sim P(\lambda)$ （ ξ 服从参数为 λ 的 Poisson 分布），

$$\sum_{k=0}^{\infty} p\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = 1$$

应用1： 某个时段内：

Poisson 分布可近似代替 $B(n,p)$

在 $B(n, p)$ 中，当 n 足够大，p 很小时：

设 $np = \lambda$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi = k\} = \lim_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

即用Poisson 分布近似代替 $B(n,p)$

利用Poisson 分布再求例 3 .

应用2 ：

Poisson 分布常用来描述大量试验中稀有事件出现次数的概率分布的数学模型。

例4、已知运载火箭在飞行中进入其仪器舱的宇宙粒子数服从参数为 2 的泊松分布。而进入仪器舱的粒子随机落到仪器重要部位的概率为 0.1，求落到仪器重要部位的粒子数的概率分布。

例5、设一只昆虫所生虫卵数为随机变量 ,已知 X， $X\sim P(\lambda)$，

且每个虫卵发育成幼虫的概率为 p ，

设各个虫卵是否能发育成幼虫是相互独立。

求一昆虫所生的虫卵发育成幼虫数 Y 的概率分布。

4）几何 分布

在Bernoulli 试验中，每次试验事件 A 发生的概率为 p ，记 ξ 为 A 首次发生时的实验次数，则

$\xi \sim$ 几何 分布，分布律：

$$P\{\xi = k\} = p(1-p)^{k-1} \quad k = 1, 2, \cdots \quad 0 < p < 1$$

5）超几何 分布

设有一批同类产品共 N 件，其中次品 M 件($M<N$)

① 现从中抽取 n 件，试求取出的n 件中所含的次品数的分布律。

解：设 ξ ：所含的次品数，

$$P(\xi=k)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\quad k=0,1,2,\cdots,l\quad l=\min\{M,n\}$$

$\xi\sim$ 超几何分布

可证明：当$N\to\infty$ 时，$\frac{M}{N}\to p$（n，k 不变），

则有 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

超几何 分布的极限是二项分布

② 如果 n 件是有放回取出的。试求取出的n 件中所含的次品数的分布律。

解：这相当于一个Bernoulli 试验，次品数的概率为 $p=\dfrac{M}{N}$

事件 $\{\xi=k\}$ 的概率

$$P(\xi=k)=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad \begin{aligned}&k=0,1,2,\cdots,l\\&l=\min\{M,n\}\end{aligned}$$

$$\xi \sim B(n,p)$$

例6：如果在时间 t 分钟内，通过某交叉路的汽车数量服从参数与 t 成正比的 Poisson 分布。已知，一分钟内没有汽车通过的概率为 0.2 ，求在 2 分钟内多于一辆汽车通过的概率。

例7：若一年中某类保险者里面每个意外死亡的概率为 0.005 ，现有1000个这类人参加人寿保险，试求在未来一年中，在这些保险者里面：

1）有10人死亡的概率 ，2）死亡人数不超过15个概率 。

五、连续型随机变量及其概率分布

定义：设 $F(x)$ 随机变量 ξ 的分布函数，若对任意的 x ，存在

$\varphi(x) \geq 0$ ，使得 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$

则称 ξ 为**连续型随机变量**，$\varphi(x)$ 为 ξ 的**概率**（分布）**密度**或**密度函数**。

注意：

分布函数与密度函数的几何意义

概率密度（分布密度）的性质：

1） $\varphi(x) \geq 0$

2） $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$

3） 对任意的 $a < b$ ， $P\{a \leq \xi < b\} = \int_a^b \varphi(x)dx$

4） 分布函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续；

5） 若 $\varphi(x)$ 在 x 处连续，则 $F'(x) = \varphi(x)$

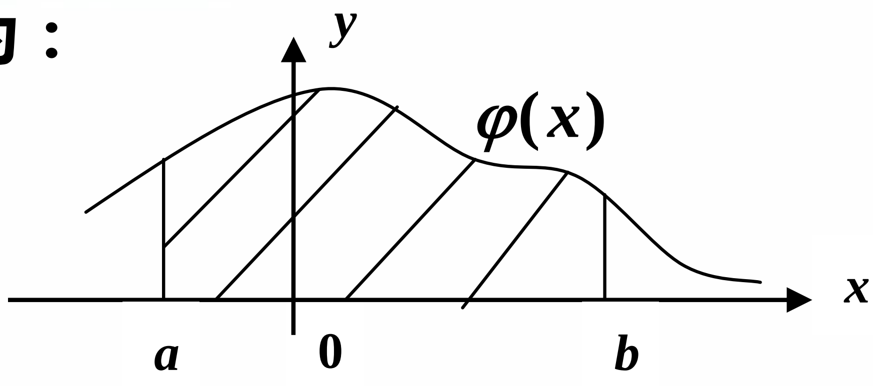
6） 对于任意的实数 c ， $P\{\xi = c\} = 0$

注意：

1）性质6）表明：对连续型随机变量 ξ ，总有

$$P\{\xi \leq x\} = P\{\xi < x\}$$

2）性质6）、3）的含义：随机变量 ξ 落在区间 $[a, b]$内的概率等于区间 $[a, b]$ 上曲线 $y=\varphi(x)$下的曲边梯形的面积，如图所示。且由此，性质3）可改为：



$$P\{a \le \xi < b\} = P\{a < \xi < b\}$$
$$= P\{a < \xi \le b\}$$
$$= P\{a \le \xi \le b\}$$
$$= \int_a^b \varphi(x)dx$$
$$= F(b) - F(a)$$

例8、设随机变量ξ 的密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases} Ax+1 & 0\le x<2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求：1）A值；2）ξ的分布函数$F(x)$；3）$P\{1.5<\xi<2.5\}$

常见的连续型随机变量分布有：

1）均匀分布

若随机变量 ξ 在[a, b]上的密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $\xi\sim U[a,b]$（区间为[a, b]上的均匀分布），

其分布函数为：

$$P(\xi<x)=F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

可见 ξ 落在[a, x]的概率为 $\dfrac{x-a}{b-a}$，体现了等可能性。

$\forall (c,d) \subset (a,b)$, $X \sim U[a,b]$

则 $P\{c < X < d\} = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$

应用：

例9、设随机变量 ξ 在 [2, 5] 上服从均匀分布，现对 ξ 进行三次独立观察，试求至少有两次观察值大于3 的概率。

2）指数分布 $E(\lambda)$

若随机变量 ξ 密度函数为（ $a>0, b$ 均为常数 ）

$$\varphi(x)=\begin{cases} ae^{-a(x-b)} & x\ge b \\ 0 & x<b \end{cases} \overset{b=0}{\underset{\lambda=a}{=}} \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

则 $\xi \sim E(\lambda)$ （ λ 为参数的指数分布）

其分布函数为：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\begin{cases} 1-e^{-a(x-b)} & x\ge b \\ 0 & x<b \end{cases}$$

$$\overset{b=0}{\underset{\lambda=a}{=}} \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

应用：

例10、某种型号的灯泡使用时间（小时）为一随机变量 ξ，

其概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5000}e^{-\frac{1}{5000}x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

求 3 个这种型号的灯泡使用了 1000 小时后至少有 2 个仍可继续使用的概率。

3）正态分布（又称Gauss分布）$N(\mu,\sigma^2)$

若随机变量 ξ 密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

其中 μ、σ 为常数，且 $\sigma>0$ ，

则称这种分布为**正态分布** $N(\mu,\sigma^2)$ ，$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$

其分布函数为：

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

注意：

当 $\mu=0$、$\sigma=1$ 时的正态分布称为标准正态分布 $N(0,1)$

其对应的密度函数 $\varphi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

其对应的分布函数

$$\Phi_0(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_0(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$具有如下性质：

1) $\varphi(x)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$

3) $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,\mu]\nearrow$，在 $[\mu,+\infty)\searrow$，在 $x=\mu$ 时达到极（最）大值 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$．说明$\xi$ 的取值密集在μ 的附近。即 μ 表示ξ 取值的集中位置（均值），σ 表示集中程度（方差）。

4) $\varphi(x)$ 的图形关于 $x=\mu$ 对称，说明 ξ 落在 $x<\mu-\sigma$ 与 $x>\mu+\sigma$ 的相应等长区间上的概率相等。

5) 设 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，作变换 $\eta=\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}$ ，则 $\eta\sim N(0,1)$

表明，任何一个 $N(\mu,\sigma^2)$ 通过变换 $\eta=\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}$ 均可使服从标准正态分布 $N(0,1)$.

6) 若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，则 ξ 的分布函数 $\Phi(x)$ 与 $N(0,1)$ 的分布函数 $\Phi_0(x)$ 有如下关系： $\Phi(x)=\Phi_0\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

由此，对任意 $a<b$ ，有

$$P\{a\le\xi<b\}=\int_a^b\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^b\varphi(x)dx-\int_{-\infty}^a\varphi(x)dx$$

$$=\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$N(0,1)$ 具有如下性质：

1） $\varphi_0(x)$ 的关于y 轴对称，即 $\varphi_0(-x)=\varphi_0(x)$

2） $\varphi_0(x)$ 在 $x=0$ 时达到极（最）大值 $\varphi(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

3） $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$ 即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$ 称 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ 为概率积分。

4） $P\{\xi>-x\}=P\{\xi<x\}$ $\Phi_0(-x)=1-\Phi_0(x)$

5） $N(0,1)$ 表

注意： 附表中仅列出 $x\geq 0$ 时的函数 $\Phi_0(x)$ 的数值，而对于 $x<0$ 时的数值，利用对称性 $\Phi_0(-x)=1-\Phi_0(x)$ 即可求得。

例11、设随机变量 $\xi \sim N(108, 9)$

求：1） $P\{101.1 < \xi < 117.6\}$

2）求常数 a **，使得** $P\{\xi < a\} = 0.90$

3）求常数 a **，使得** $P\{|\xi - a| > a\} = 0.01$

例12、某种电池的寿命 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ **，其中** $\mu = 300$ **小时，**
$\sigma = 35$ **小时，1) 求电池寿命在 250 小时以上的概率；**
2）求使寿命在 $\mu - x$ **与** $\mu + x$ **之间概率不小于 0.9 的** x **.**

例13、某单位招聘 2500 人，按考试成绩从高分到低分依次录用，共有10000 人报名，假设报名者的成绩 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 已知 90 分以上有359 人，60分以下有1151 人，问被录用者中最低分是多少？

例14、设测量的误差 $X \sim N(7.5, 100)$（单位：m），问要进行多少次独立测量，才能使至少有一次误差的绝对值不超过 10 m 的概率大于 0.9 ？

六、随机变量函数的分布

问题 已知随机变量 X 的分布律或概率密度函数 $\varphi_X(x)$，

求随机变量 $Y=f(X)$ 的分布律或概率密度函数 $\varphi_Y(y)$.

方法 将与 Y 有关的事件转化成 X 的事件。

1、离散型随机变量函数的分布

设 r.v. X 的分布律为 $P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\cdots$

r.v. $Y=f(X)$，则 Y 的概率分布为：

$$P(Y=y_i)=\sum_{k:\ f(x_k)=y_i} p_k,\quad i=1,2,\cdots$$

例15、设随机变量 X 的概率分布为：

X	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π
p_k	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

求 $Y_1 = X + \pi$ 和 $Y_2 = \sin X$ 的分布律。

解：

Y_1	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
p_k	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

Y_2	-1	0	1
p_k	0.1	0.6	0.3

2、连续型随机变量函数的分布

设 r.v. X 的概率密度函数 $\varphi_X(x)$ 或分布函数，

r.v. $Y=f(X)$ ，求 Y 的概率概率密度函数

方法： 1）从分布函数出发　2）用公式直接求

例16、设连续型 r.v. X 的概率密度为 $\varphi_X(x)$ ，

r.v. $Y=aX+b$ ，a,b 为常数，且 $a\neq 0$，求 $\varphi_Y(y)$.

解：由分布函数定义，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)$

当 $a>0$ 时，$F_Y(y)=P\left(X\le\dfrac{1}{a}(y-b)\right)=F_X\left(\dfrac{1}{a}(y-b)\right)$

两边求导得：$\varphi_Y(y)=\dfrac{1}{a}\varphi_X\left(\dfrac{1}{a}(y-b)\right)$

当 $a<0$ 时，

$$F_Y(y)=P\left(X\geq\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=1-F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

两边求导得：

$$\varphi_Y(y)=-\frac{1}{a}\varphi_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$\therefore\varphi_Y(y)=\frac{1}{|a|}\varphi_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$