§3 微分运算

一、基本初等函数的微分公式

对可微函数 $y = f(x)$，其微分 $dy = f'(x)dx$

由求导公式和求导运算法则，可直接得到如下微分公式和微分运算法则。

1）基本初等函数的微分公式（p67）

2）微分运算法则

设 f 和 g 均是可微函数，α, β 是常数，

则 1. $d(\alpha f + \beta g) = d(\alpha f) + d(\beta g) = \alpha df + \beta dg$

2. $d(fg) = gdf + fdg$

$$3.\ d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g \neq 0)$$

$$4.\ dx = \frac{dy}{f'(x)} = [f^{-1}(y)]'dy$$

$$5.\ d[f(g(x))] = f'(u)g'(x)dx$$

二、一阶微分形式的不变性

设函数 $y = f(x)$ 有导数 $f'(x)$

1）若 x 是自变量，则 $dy = f'(x)dx$

2）若 x 是中间变量时，即另一变量 t 的可微函数

函数 $x = \varphi(t)$ ，则

$$dy = (f \circ \varphi)'(t)dt = f'[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = f'(x)dx$$

所以，无论 x 是自变量还是中间变量，

函数 $y = f(x)$ 的微分形式

$dy = f'(x)dx$ 始终保持不变。

例1、$y = In(1+e^{2x})$ 求 dy

例2、对于 $y = f(x)$ 求 d^2y.

例3、设 $y=\arctan(1+e^{x})$ ，求 $\dfrac{dy}{d\tan x}$

例4、设 $y=f(x)$ 由方程 $xy^{2}+\sin x^{3}=y\cdot 3^{x}$ 确定，

求 dy .

三、隐函数求导

显函数： 函数 y 可用变量 x 的方程来表示 $y = f(x)$

隐函数： y 与x 的关系不易或不能相互显表示，

而是由一个解析式表示 $F(x, y) = 0$

如： $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$， $\cos xy + Inxy + 2 = 0$

隐函数的 $F(x, y) = 0$ 求导法则：

用复合函数求导法则同时对方程两边求导。

例5、$\cos xy + Inxy + 2 = 0$ 求 y'

例6、设曲线 C 的方程为 $x^3 + y^3 = 3xy$，求过 C 上点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ 的切线方程，并证明曲线 C 在该点的法线通过原点。

例7、$x^4 - xy + y^4 = 1$ 求 y'' 在点 $(0, 1)$ 处的值。

四、参数方程求导

平面直角坐标系中，一般曲线可以用参数给出，

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta]$$ 确定 y 与 x 间的函数关系，

称此为由参数方程所确定的函数。

例8、$\begin{cases} x=2t \\ y=t^2 \end{cases}$ 求 y'

问题：消去参数困难或无法消去参数时，如何求导?

设在方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 中，

若函数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t) \neq 0,$

则曲线的切线的斜率： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

若函数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 二阶可导，

则 $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\frac{1}{\varphi'(t)}$$

例9、求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

例10、设曲线 Γ 由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 所确定，试求该曲线上任一点的切线斜率，并写出过对数螺线 $r = e^{\theta}$ 上点 $\left(e^{\frac{\pi}{2}}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程。

思考题

设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，　由 $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$　$(\varphi'(t) \neq 0)$

可知 $y''_x = \dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$，对吗？

五、微分的应用

1、近似计算

1）函数增量的近似值

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，

且 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\big|_{x=x_0}\approx dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x$

2）函数的近似值

$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 附近的近似值

由微分定义可知：

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\underbrace{df(x)\big|_{x=x_0}}_{\Downarrow\ f'(x_0)\Delta x}+\underbrace{o(\Delta x)}_{\Downarrow\ \Delta x\text{的高阶无穷小}}$$

$$\therefore\ f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

3）$f(x)$ 在点 $x=0$ 附近的近似值

令 $x_0=0 \quad \Delta x=x$

$\because \quad f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

$\therefore \quad f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$

常用的近似公式 （$|x|$ 很小时）

1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$

2) $\sin x\approx x$ （x 为弧度）

3) $\tan x\approx x$ （x 为弧度）

4) $e^x\approx 1+x$

5) $\ln(1+x)\approx x$

注意：

1）正确选择 x_0 和 $\Delta x\,(or\ \ x-x_0)$，原则上所选 x_0，使 $f(x_0)$、$f'(x_0)$ 易计算，相应的 $\Delta x\,(or\ \ x-x_0)$ 尽可能的小。

2）自变量增量 Δx 可取负值。

例11、计算 $\sqrt[3]{998.5}$ 的近似值。

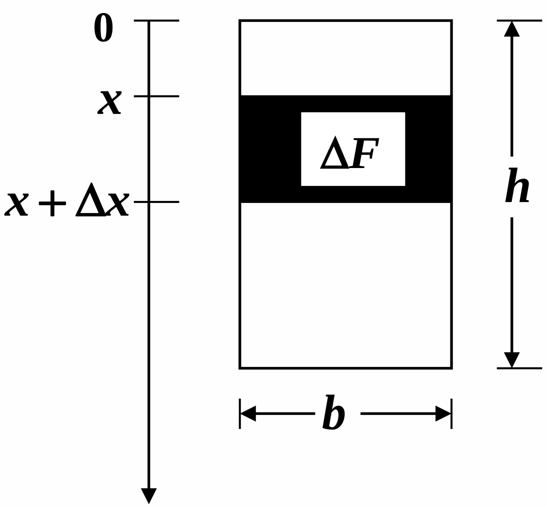
例12、计算 $\sqrt{3}$ 的近似值。

2、微分的实际应用

微分的真正作用是“自然规律的数学表示”，也即“自然规律的数学模型”。

例13、矩阵水闸门的压力研究_

求水利工程中，矩阵闸门上的总压力。



3、误差估计

1）绝对误差_

如果某个量得精确值为 x ，它的近似值为 x_0 ，那么 $|x-x_0|$ 为 x_0 的绝对误差。

2）相对误差_

绝对误差与 $|x_0|$ 的比值 $\dfrac{|x-x_0|}{|x_0|}$ 为 x_0 的相对误差。

在实际问题中，精确值 x 是不知道的，故绝对误差、相对误差无法求得，只能根据测量仪器的精度等因素，设法确定误差的范围，

$|x-x_0|<\delta_x$ 称 δ_x 为绝对误差限，

$\dfrac{\delta_x}{|x_0|}$ 为相对误差限。_

微分运算提供了：先测量 x 的值，再根据关系式_

$y=f(x)$ 来计算 y，这就要求根据 x 的误差范围

估计 y 的误差范围的估计方法。_

$$\because |\Delta y| \approx |dy| = |f'(x_0)\Delta x| \le |f'(x_0)| \cdot \delta_x$$

取 $\delta_y = |f'(x_0)|\delta_x$

$$\because \frac{\delta_y}{|y_0|} = \frac{|f'(x_0)|\delta_x}{|f(x_0)|} = \left|\frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}\right| \frac{\delta_x}{|x_0|}$$

$$\therefore \delta_y^* = \left|\frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}\right| \delta_x^*$$

例14：正方形边长为 2.41±0.005 米, 求出它的面积, 并估计绝对误差与相对误差。