§3 逆矩阵

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$

写成矩阵的形式 $AX = B$

其中：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

系数矩阵

解向量

解线性方程组的问题转化成求列矩阵X的问题，而求X的方法就是矩阵的除法，为此引入逆矩阵的概念。

一、逆矩阵的概念

1、定义 对于n 阶方阵A，若存在一个n阶方阵B，

满足 $AB = BA = I$

则称 B为 A 的逆矩阵（A 也称为B 的逆矩阵），

记为 A^{-1}这是称A是可逆阵（简称可逆）。

2、定义 若n 阶方阵，满足$|A|\neq 0$，则称A为非奇异矩阵，（简称非奇阵），否则称A为奇异矩阵。

3、定理 n 阶方阵A可逆的 $\Leftrightarrow$ A 是非奇异阵

证: "$\Rightarrow$" $\because A$可逆，$\therefore$ $A^{-1}A = I$

又由行列式性质: $\left|A^{-1}A\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot \left|A\right| = \left|I\right| = 1$

$\therefore$ $\left|A\right| \neq 0$ 即A是非奇异阵

同时也得到了 $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|A\right|}$

"$\Leftarrow$" 记A的伴随矩阵为：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ 其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，

则有

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

即 $AA^* = |A| \cdot I$

$\because A$是非奇异阵，即 $|A| \neq 0 \Rightarrow A\dfrac{A^*}{|A|} = I$

$\therefore$ 由逆矩阵定义得：$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$ 即A可逆。

例1、设 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

解：$\because\ |A|=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

即 $|A|\neq 0 \quad \therefore\ \exists A^{-1}$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

用 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ 求逆矩阵的方法较适用于低阶的可逆矩阵，但是求n阶矩阵的逆矩阵要求算出 n^2 个 n-1 阶行列式和一个 n 阶行列式。

4、逆矩阵的性质：（设A、B 均是同阶可逆矩阵阵）

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) 可逆矩阵的逆矩阵是唯一的。

3) 若 $AB = I$ 或 $BA = I$ 之一成立，则 $B = A^{-1}$

4) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6) 若 A 可逆，数 $k \neq 0$，则 kA 也可可逆，且

$$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$$

7) $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$

二、用初等变换求逆矩阵

若有一列n阶方阵B_1，B_2，…，B_m从一个方向依依次乘A（假如左乘），即$B_m…B_2B_1A$，使得A变成了单位矩阵，即 $B_m\cdots B_2B_1A=I$ (*)

$$\because |B_m\cdots B_2B_1A|=|B_m|\cdots|B_2||B_1||A|=|I|=1\Rightarrow|B_m|\cdots|B_2||B_1|\neq 0$$

因此B_1，B_2，…，B_m都是可逆的；且

$$B_m\cdots B_2B_1AA^{-1}=IA^{-1} \quad 即 \quad A^{-1}=B_m\cdots B_2B_1I \qquad (*')$$

所以$B_m … B_2B_1$为A的逆矩阵。

从（*）→（*’）说明:若将一串矩阵同时作用于矩阵A和单位矩阵I，则它们在将A变成单位阵I的同时，将单位阵I变成了A^{-1}. 所以，只要设法找到这样一串矩阵B_1，B_2，…，B_m即可求出逆阵。

1、初等矩阵

由单位矩阵I经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**。有三种类形：

定理：

1）将n阶单位阵I的第i行与第j行互换（或第i列与第j列互换）所得的矩阵称为第一类初等矩阵。

$$E_{ij}=\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & \ddots & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}\right)\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\text{第}i\text{行}\\
\\
\text{第}j\text{行}\\
\\
\\
\\
\end{array}$$

容易验证：

$$(E_{ij})^{-1}=E_{ij}$$

说明：

E_{ij} 可逆

2）将n 阶单位阵I 的第i 行（或第i 列）乘非零常数λ所得的矩阵称为第二类初等矩阵。

$$P_i(\lambda)=\begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

容易验证： $(P_i(\lambda))^{-1}=P_i\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$

说明： $P_i(\lambda)$ 可逆

3）将n阶单位阵I的第i行乘常数λ加到第j行（或第j列 乘常数λ加到第i列）所得的矩阵称为第三类初等矩阵。

$$T_{ij}(\lambda)=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&&&& \\ &&\vdots&\ddots&&& \\ &&\lambda&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

容易验证： $(T_{ij}(\lambda))^{-1}=T_{ij}(-\lambda)$

说明： $T_{ij}(\lambda)$ 可逆

以上三类初等矩阵统称为初等矩阵。

定理：

1）用E_{ij}左乘（右乘）矩阵A相当于互换A的第i行与第j行（或第i与第j列）。$r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$

2）用$P_i(\lambda)$左乘（右乘）矩阵A相当于 用λ乘A的第i行（或第i列）。 $r_i \times k$ $(c_j \times k)$

3）用$T_{ij}(\lambda)$左乘（右乘）矩阵A相当于 A的第i行（第j列）乘常数λ加到第j行（第i列）。

$r_j \times k + r_i$ $(c_j \times k + c_i)$

统称为矩阵的初等变换

以上三种变换分别称为矩阵的第一、第二、第三类初等行（列）变换。

与行列式的运算有什么不同 ？

初等变换将矩阵A化为B时，A与B之间用记号“$\rightarrow$”或“$\sim$”连接。

矩阵的初等变换是线性代数的一个重要工具。

例2、$P_3(-2)$ 是将单位矩阵的第3行（列）乘（-2）；

$P_3(-2)A$ 是将矩阵A的第3行乘（-2）；

$A\,P_3(-2)$ 是将矩阵A的第3列乘（-2）；

$T_{12}(1)$ 是将单位矩阵的第1行乘1加到第2行；

或是将单位矩阵的第2列乘1加到第1列；

$T_{12}(1)A$ 是将矩阵A的第1行乘1加到第2行；

$AT_{12}(1)$ 是将矩阵A的第2列乘1加到第1列。

2、用初等变换求逆矩阵

定理： n 阶方阵A 可逆 $\Leftrightarrow$

存在初等矩阵 B_1，B_2，…，B_p(C_1，C_2，…，C_q)

使得 $B_p \cdots B_2 B_1 A = I$ （$AC_1 C_2 \cdots C_q = I$）

$\therefore\ A^{-1} = B_p \cdots B_2 B_1$ （$A^{-1} = C_1 C_2 \cdots C_q$）

推论：

可逆矩阵可以分解为有限个初等矩阵的乘积。

由以上定理得到一种求逆矩阵的实用方法：

$$\left(A \;\vdots\; I\right) \xrightarrow{\text{若干初等行变换}} \left(I \;\vdots\; A^{-1}\right)$$

辅助矩阵

或

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{若干初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ \hdashline A^{-1} \end{pmatrix}$$

例3、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **求** A^{-1}

三、矩阵的秩

Frobenius首先提出的

1、定义 矩阵 $A_{n\times m}=(a_{ij})_{n\times m}$ 中一切非零子式的最高阶数，称为矩阵A 的秩，记为$r(A)$.

等价于矩阵A 的秩等于r $\Leftrightarrow$ 有r 阶子式不等于零，所有大于r 阶的子式均为零

$A_{n\times m}$ 的 r 阶子式有$C_m^r C_n^r$ 个

秩是矩阵的一个重要数字特征，是求解线性方程组的核心概念！

2、秩的求法

定理：若$A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$.

即初等变换不改变矩阵的秩

所以，用初等变换将A 化为阶梯形阵可得其秩。

例4、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{pmatrix}$ 求A 的秩。

定义：

设 $A_{n\times m}=(a_{ij})_{n\times m}$

若 $r(A)=n$ 则称A 为行满秩矩阵；

若 $r(A)=m$ 则称A 为列满秩矩阵；

若A 为n 阶矩阵，且 $r(A)=n$

则称A 为满秩矩阵。

四、线性方程组的预备知识

矩阵的初等变换是矩阵的一种十分重要的运算，它在解线性方程组、求逆矩阵及矩阵理论的讨论中有着重要的作用。

线性方程组 $AX = B$

其中：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

如果 $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$,$\cdots$, $x_m = k_m$ 是上述方程组的解，

那么称 $X = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix}^T$ 为线性方程组的解向量，

即是矩阵方程 $AX = B$ 的解。

设有两个n元线性方程组 $A_1X=B_1$　$A_2X=B_2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果}A_1X=B_1\text{的解都是}A_2X=B_2\text{的解}\\ \text{而}A_2X=B_2\text{的解又是}A_1X=B_1\text{的解}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}A_1X=B_1\\ A_2X=B_2\end{array}\text{同解}$$

消元法如何解线性方程组

基本思想：通过方程组的消元变形把方程组化成
容易求解的同解方程组

举例 $$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=6 & ① \\ x_1-2x_2+4x_3=3 & ② \\ 5x_1+7x_2+x_3=28 & ③\end{cases}\qquad (1)$$

解：①↔②得 $$\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3 & ① \\ 2x_1+2x_2-x_3=6 & ② \\ 5x_1+7x_2+x_3=28 & ③\end{cases}\qquad (2)$$

①×(-2)+②
①×(-5)+③

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 & ① \\ 6x_2 - 9x_3 = 0 & ② \\ 17x_2 - 19x_3 = 13 & ③ \end{cases} \quad (3)$$

②×(-17/6)+③
②×(1/6)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 & ① \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 & ② \\ \frac{13}{2}x_3 = 13 & ③ \end{cases} \quad (4)$$

③×(2/13)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 & ① \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 & ② \\ x_3 = 2 & ③ \end{cases} \quad (5)$$

③×(3/2)+②
③×(-4)+①

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad (6)$$

消元法解线性方程组时，始终把方程组变成另一个同解方程组（(1)～(6) 均为同解方程组），对方程组反复施行三种运算：$i \leftrightarrow j$　$i \times k$　$i \times k + j$
且整个过程中，只对方程组的系数和常数项进行运算。故只要不打乱系数的排列，即可把变量隐去，记为 $\bar{A} = (A \,\vdots\, b)$ 称为增广矩阵。

所以，消元法解线性方程组的三种运算，就是对线性方程组的增广矩阵进行相应的初等行变换，化为阶梯形矩阵，新的矩阵所对应的线性方程组的解就是原来线性方程组的解。