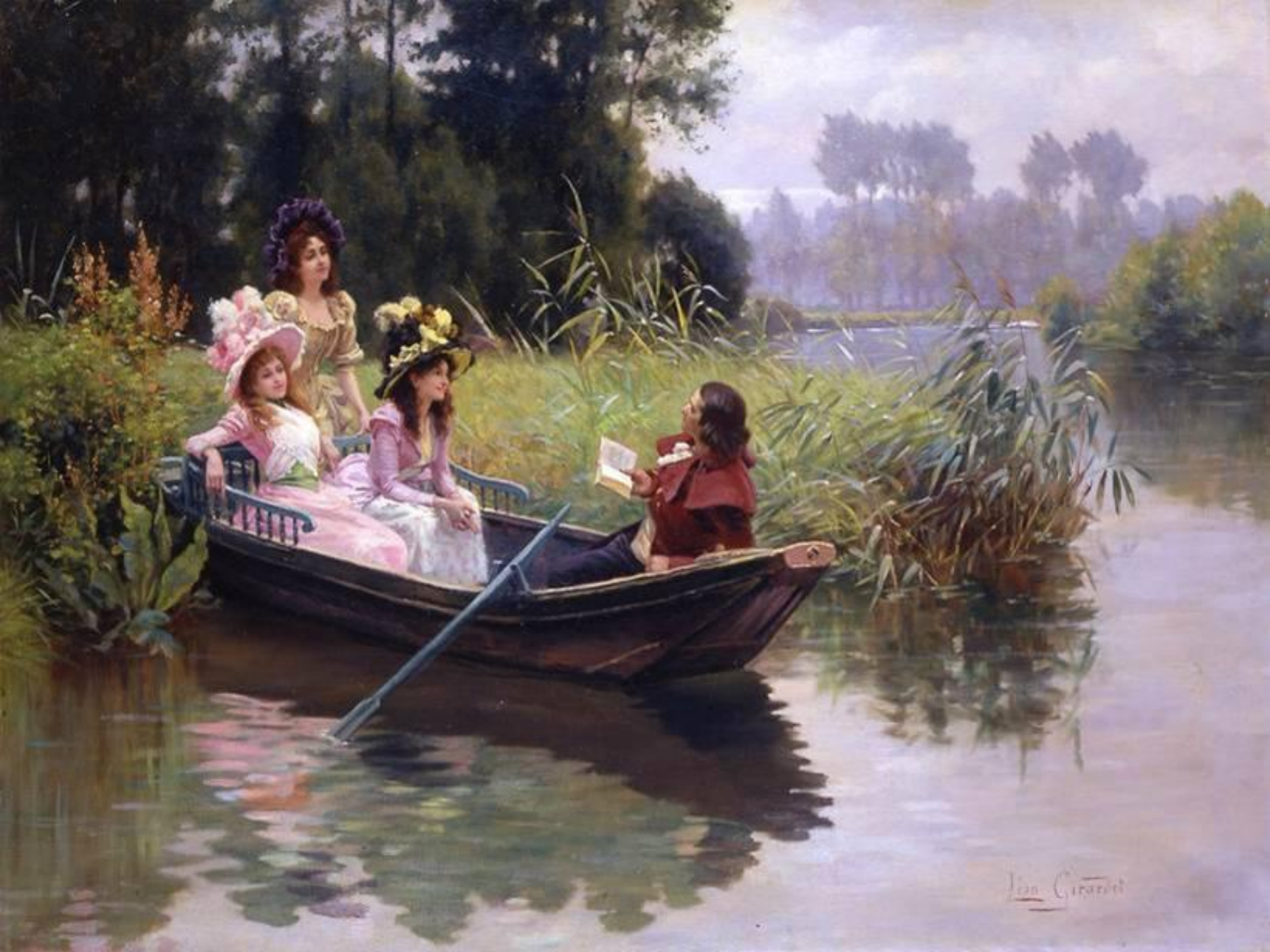

§2　矩阵

矩阵是线性代数主要的研究对象，在数学的许多分支中有着重要的应用。许多实际问题可用矩阵来表示，并可用线性代数的矩阵理论来解决。

本章主要讨论：

矩阵的概念及其运算；

逆矩阵；

初等变换与矩阵的秩；

线性方程组的求解。

一、矩阵的概念

1、定义 $n\times m$个实数$a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$

排成的 n 个行 m 个列的数表。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

称为$n\times m$ 的实矩阵，

a_{ij}为矩阵的元素，表示

第 i 行第 j 列交叉位置上的元素。

矩阵通常用大写字母A、B、C 等表示，

简记为 $A_{n\times m}=(a_{ij})_{n\times m}$

行矩阵 $(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_m)$ 列矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

2、两个矩阵 A 和 B 相等

同型矩阵： 矩阵 A 和 B 的行数与列数分别相同

只有两个同型矩阵才能讨论其相等。

两个矩阵 A 和 B 相等

$\Leftrightarrow$ A和 B 同型矩阵，且对所有的 i 、j 满足$a_{ij} = b_{ij}$

记为：$A = B$

3、n 阶方阵 行数与列数相等的矩阵

一般形式：
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4、单位矩阵

$$I_n=\left(\delta_{ij}\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

5、数量矩阵

$$\lambda I_n=\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$$

6、对角矩阵

$$diag(d_1,d_2,\cdots d_n)=\left(\delta_{ij}\cdot d_i\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix}d_1&0&\cdots&0\\0&d_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&d_n\end{pmatrix}_{n\times n}$$

7、三角矩阵

1）上三角阵 $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\left(a_{ij}=0\,,i>j\right)$

即：
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2）下三角阵 $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\left(a_{ij}=0\,,i<j\right)$

即：
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8、零矩阵 $\mathbf{0}_{n\times m}$

所有元素全为零 $a_{ij}=0$ $(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$

也即分量全是零的向量称为零向量。

9、负矩阵

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ $\quad -A=(-a_{ij})_{n\times m}$

10、转置矩阵

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}\in R^{n\times m}$

则转置矩阵 $A^T=(b_{ij})_{m\times n}$ 其中 $b_{ij}=a_{ji}$

即矩阵的行（或列）换成列（或行）所得的矩阵。

列向量表示 a、b 行向量表示 a^T、b^T

显然，对$\forall A$，$(A^T)^T=A$ $\quad a^T=(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n)$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

二、矩阵的运算

1、加法

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$　　$B=(b_{ij})_{n\times m}\in R^{n\times m}$

定义 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times m}$　$(\,i=1,\cdots,n\,;\ j=1,\cdots,m\ )$

矩阵的加法满足如下运算规律：

1) $A+B=B+A$

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$

3) $(A+B)^T=A^T+B^T$

4) $A+0=A$

5) $A+(-A)=0$

2、减法

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ $B=(b_{ij})_{n\times m}\in R^{n\times m}$ $(i=1,\cdots,n;$

定义 $A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{n\times m}$ $j=1,\cdots,m\ )$

3、数乘

设 数 $\lambda\in R$ $A=(a_{ij})_{n\times m}\in R^{n\times m}$

定义：数乘为 $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{n\times m}$

矩阵的数乘满足如下运算规律：

1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

$$\lambda I_n=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$$

4、乘法

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}\in R^{n\times m}$ $B=(b_{ij})_{m\times p}\in R^{m\times p}$

定义矩阵 A 与 B 的乘积为：

$$A_{n\times m}B_{m\times p}=\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\right)_{n\times p}=(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{im}b_{mj})_{n\times p}$$

表示：$A_{n\times m}B_{m\times p}$ 的第 i 行第 j 列交叉位置(i,j) 处的元素等于 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列元素对应相乘后加起来。

注意：A 与 B 可相乘，即 AB 有意义的条件是 A 列数必须等于 B 的行数。

结果是　乘积 AB 的行数等于 A 的行数，

列数等于 B 的列数。

例：设 $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}$　　$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$

首先根据两矩阵相乘的条件判断是否可相乘，

即第一矩阵的列数=第二矩阵的行数。

则 $A_{2\times 3}$ 与 $B_{3\times 2}$ 可相乘为：

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}15 & -14\\ -15 & 14\end{pmatrix}$$

那么 $B\cdot A$ ？

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -4 & 16 & -8\\ 7 & -28 & 14\end{pmatrix}$$

显然，AB 与 BA 是两个不同型矩阵。

一般情况下，矩阵的乘法是不满足交换律的。

假设 A与 B 可相乘

① B 与 A 不一定可相乘；

②即使 B与 A 可相乘（如上例），那么AB与 BA 也未必是同型矩阵；

③即使 AB 与 BA 是同型矩阵，一般情况下，$AB \neq BA$.

所以，矩阵的乘法是有次序的。

为了区别：规定 AB 称为 A 左乘 B ；

BA 称为 A 右乘 B .

矩阵的乘法满足如下运算规律：

1) $(AB)C = A(BC)$

2) $(A+B)C = AC+BC$

3) $A(B+C) = AB+AC$

4) $I_n A_{n\times m} = A_{n\times m} I_m = A \quad \forall A_{n\times m}$

5) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ $\quad k$ 为任意常数

6) $(AB)^T = B^T A^T$

7）任何方阵A 与其本身总是可以相乘的，记A 的 k 次幂为：$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k}$

且规定 $A^0 = I$

矩阵究竟有何实际意义呢？

列昂杰夫投入—产出模型

从经济角度来看，每个部门都有双重身份：

1）作为生产部门生产出各种产品以满足各种需要-产出

2）作为消费者又消费着其他部门生产的产品- 投入

设国民经济（或某地区的经济）有 n 个经济部门，假定每个部门只生产一类产品（简单起见），用货币来表示各个部门所生产的产品与消耗的商品。

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为投入-产出矩阵

其中 a_{ij} 为投入系数，且非负的，其含义：

a_{ij}：每生产1万元第 j 类产品所需消耗的第 i 类商品的价值。

设$n=3$时，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.25 & 0.40 & 0.50 \\ 0.35 & \text{正常} & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.10 \end{pmatrix}$$

投入系数是小于1的正数

A: 第一列表示生产第一类商品所消耗的第一类商品、第二类商品及第三类商品的价值（用货币表示）；

同理，第二（三）列表示生产第二（三）类商品所消耗的各类商品的价值。

$a_{ij}>1$ 表明：生产第j类产品所消耗的第i类产品的价值反比j类产品本身价值还要大。

若A的每一列各元素之和大于1。

例1：某厂向三个商店发送四种产品

a_{ij} 表示向第 i 店发送第 j 种产品的数量

则发送的数量可用矩阵A 表示：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

b_{i1} 表示第 i 产品的单价，

b_{i2} 表示第 i 产品的单件重量，

则四种产品的单价和单件重量可表示为矩阵B ：

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

总值和总重量的矩阵

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} \\
b_{21} & b_{22} \\
b_{31} & b_{32} \\
b_{41} & b_{42}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\sum_{j=1}^{4} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{4} a_{1j} b_{j2} \\
\sum_{j=1}^{4} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{4} a_{2j} b_{j2} \\
\sum_{j=1}^{4} a_{3j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{4} a_{3j} b_{j3}
\end{pmatrix}
$$

例2、在群体遗传学中，若一种群体带有两种等位基因 a_1 和 a_2 ，它们的可能性分别为 p 和 q （$p+q=1$）.

将这两种等位基因用矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 表示，

相应的可能性用 $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 表示。

如果这个种群随机交配，就得到四种基因型 a_1a_1 ,a_1a_2 ,a_2a_1 ,a_2a_2 （这里每对中的第一个字母表示雌亲体，第二个字母表示雄亲体），那么这种基因组合可用矩阵

$$AA^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 \\ a_2a_1 & a_2a_2 \end{pmatrix}$$ 来表示，

而相应的基因型的可能性可用

$$PP^T=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^2 & pq \\ qp & q^2 \end{pmatrix}$$ 来表示。

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$

写成矩阵的形式 $AX = B$

其中：

解向量

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

系数矩阵

当$B = 0$时， $AX = 0$ 为齐次方程组

当$X = 0$时， 称为零解或平凡解

当$X \neq 0$时，称为非零解或非平凡解

解线性方程组的问题变成了求矩阵X.

三、分块矩阵及运算

1、定义 将一个矩阵用横线和纵线分成若干小块后所得的矩阵称为分块矩阵。

例如：

$$A=\left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

称 A_{st} 为A 的子矩阵。

2、加法

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ $\quad B=(b_{ij})_{n\times m}\in R^{n\times m}$

定义 $A+B=(A_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta})_{s\times t}$

同样的分块方式，相应的同型矩阵相加。

3、数乘

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{n\times m}=(\lambda A_{\alpha\beta})_{s\times t}$$

4、乘法

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ $B=(b_{ij})_{m\times p}$

若A 的列数分法与B 的行数分法相同，即

$A=(A_{\alpha\beta})_{s\times t}$ $B=(B_{\beta r})_{t\times l}$

则 $AB=(C_{\alpha r})_{s\times l}$

5、特殊的分块

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array}\right)_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

其中：a_j 为A 的第 j 个列向量。($j=1,\cdots,m$)

例如：n 维向量 $e_i=(0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)^T=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

则 n 维单位矩阵：

$$I=(e_1\ \ e_2\ \ \cdots\ \ e_n)=\begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix}$$

四、方阵与行列式的性质：

1. $|AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |BA|$

2. $|A^k| = |A|^k$

3. $|A^T| = |A|$