§3 曲面、曲线和二次曲面

一、曲面

在空间解析几何中，任何曲面 Σ 都可看作点 $P(x, y, z)$ 的几何轨迹。在这样的意义下，如果曲面 Σ 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系：

1）曲面 Σ 上任一点的坐标 (x, y, z) 都满足方程，

$$F(x, y, z) = 0\,;$$

2）不在曲面 Σ 上点的坐标都不满足方程，

则称 $F(x, y, z) = 0$ 为曲面 Σ 的曲面方程。

空间曲面的研究有两个基本问题

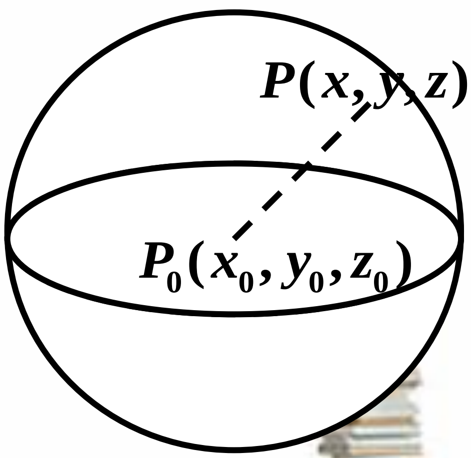
1）已知曲面上点的轨迹变化规律，求相应的轨迹方程（曲面方程）；

2）已知方程 $F(x, y, z)=0$ ，求相应曲面的几何图形。

1^0 几个常见曲面方程的建立

1、球面方程

到球心距离等于定值的动点的轨迹。



$$\left|\overrightarrow{P_0P}\right|=r$$

即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

特别当球心在原点时，

球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=r^2$

例1、求与点 $A(3, 7, 6)$ 的距离为 2 个单位，而与点 $B(2, 5, 4)$ 的距离为 4 个单位的点的轨迹方程。

解：设 $P(x, y, z)$ 为所求轨迹的任一点，

$$\therefore \left|\overrightarrow{AP}\right| = 2, \quad \left|\overrightarrow{BP}\right| = 4,$$

即 $$\begin{cases} \sqrt{(x-3)^2+(y-7)^2+(z-6)^2} = 2 \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2+(z-4)^2} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-7)^2+(z-6)^2 = 4 \\ (x-2)^2+(y-5)^2+(z-4)^2 = 16 \end{cases}$$

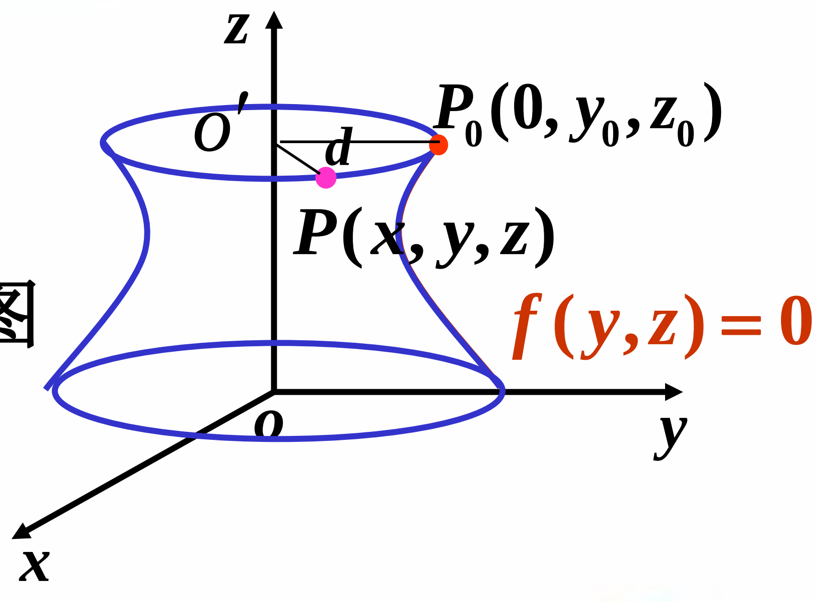
∴所求点的轨迹方程为：两球面的交线。

2、在 Oyz 平面上有一条曲线 $f(y, z) = 0$，求它绕 z 轴旋转一周生成曲面的方程。

点 $P_0(0, y, z)$ 在 Oyz 平面的这条曲线上，

$\therefore f(y_0, z_0) = 0$

当曲线绕 z 轴旋转一周得左图



显然 $|\overrightarrow{O'P_0}| = |\overrightarrow{O'P}|$

即 $|y_0| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$

$\therefore y_0 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

代入曲线方程得 $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2},\ z) = 0$

为曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面方程

同理可导出 $f\ (y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周生成的曲面方程

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

旋转曲面的定义：

平面的一条定曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面，称为**旋转曲面**。

同理：在 Oxy 平面上的曲线 $g(x,y)=0$ 分别

绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面方程：$g(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

绕 y 轴旋转一周生成的旋转曲面方程：$g(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$

在 Oxz 平面上的曲线 $h(x,z)=0$ 分别

绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面方程：$h(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面方程：$h(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

例2、在 Oxz 坐标面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面方程。

解：绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

旋转双曲面

绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

例3、试写出在 Oyz 平面上的曲线 $z=1+y^2$ 以 z 轴为旋转的旋转曲面方程，并作图。

解：平面曲线 $f(y,z)=1+y^2-z$

绕 z 轴旋转的曲面方程为

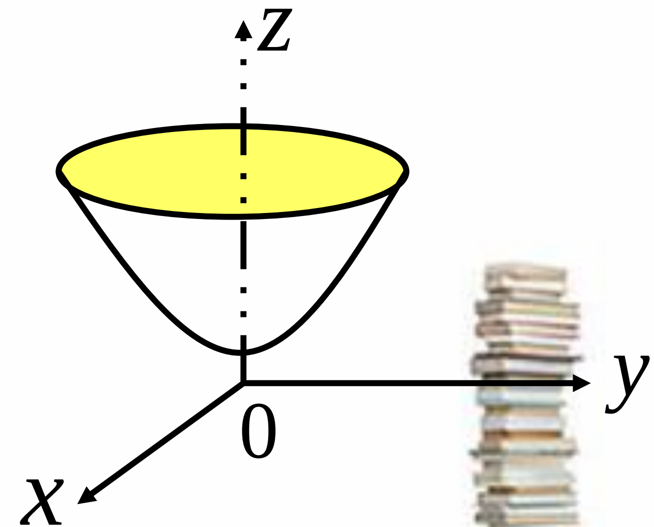
$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=1+x^2+y^2-z=0$$

即 $z=1+x^2+y^2$

图形：$z=1+y^2$ 为 Oyz 平面上的抛物线，

顶点在 z 轴上为 $(0,0,1)$，

对称轴为 z 轴。



2^0 已知方程 $F(x, y, z) = 0$ 求相应曲面的几何图形

1、$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$ 的曲面。

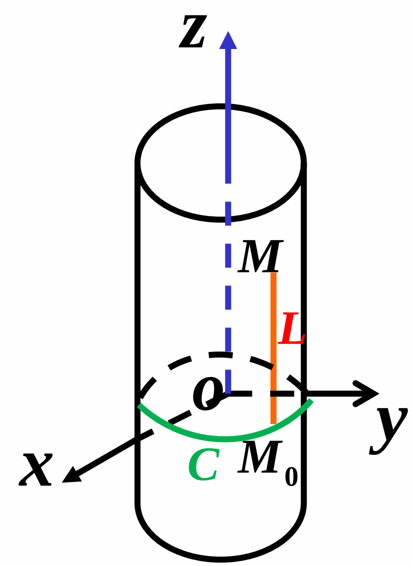
配方 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$

表示：球心为 $P_0(1, -2, 0)$,

半径为 $\sqrt{5}$ 的球面。

2、柱面方程

平行于定直线，并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹（曲面）称为柱面。

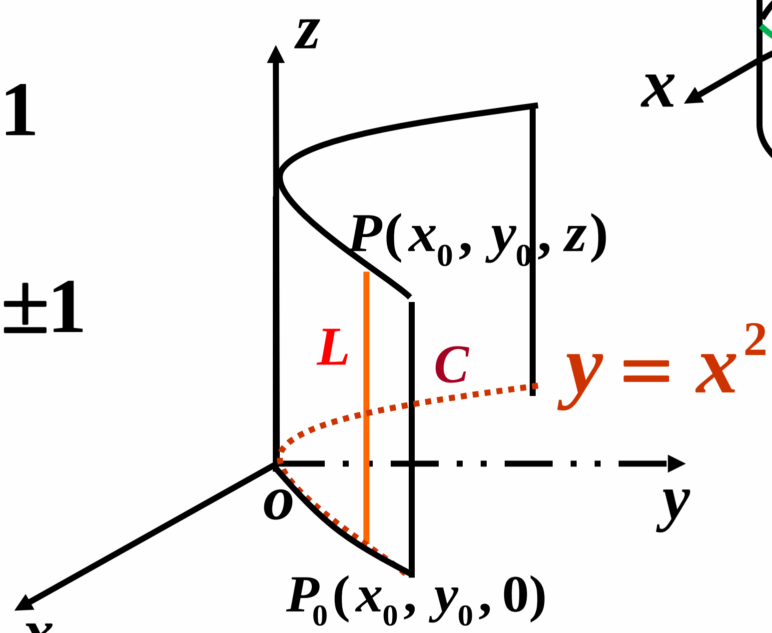


1）圆柱面 $x^2+y^2=R^2$

2）抛物柱面 $y^2=Bx$ $\quad x^2=Ay$

3）椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

4）双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$

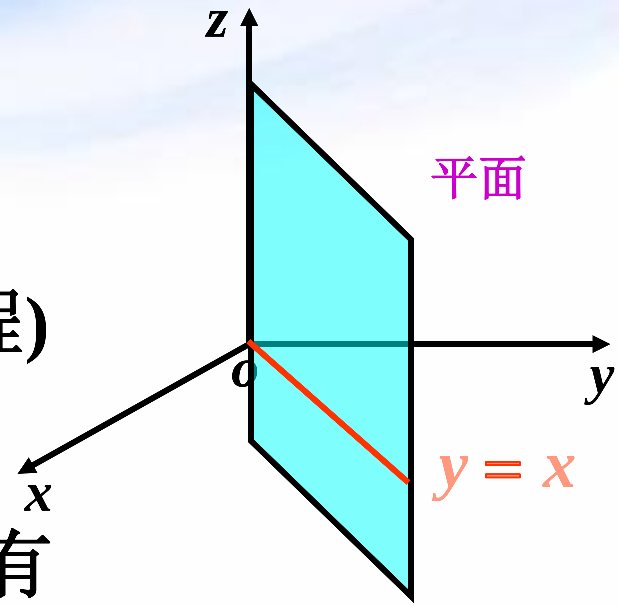


抛物柱面

说明:

1）平面是一种特殊的柱面，

它的准线是一条直线;



2）对于方程 $f(x, y) = 0$ (不含 z 的方程)

表示以 $f(x, y) = 0$ 为准线，

母线平行于 z 轴的柱面。 类似地有

3）对于方程 $f(x, z) = 0$ (不含 y 的方程)

表示以 $f(x, z) = 0$ 为准线，母线平行于 y 轴的柱面。

如 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

是以 Oxz 平面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 为准线，

母线平行于 y 轴的双曲柱面。

4）对于方程 $f(y, z) = 0$ (不含 x 的方程)

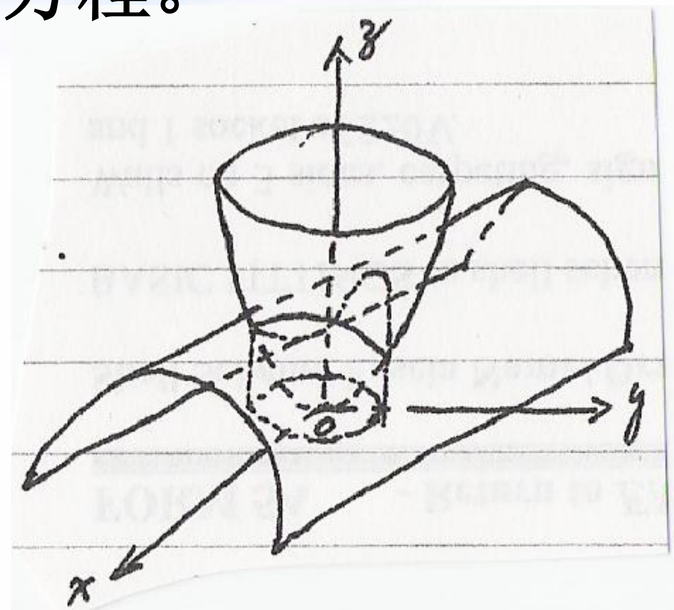
表示以 $f(y, z) = 0$ 为准线，母线平行于 x 轴的柱面。

如 $y - z = 0$

是以 Oyz 平面上的直线 $y = z$ 为准线，

母线平行于 x 轴的柱面即平面。

例4、求椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 与抛物柱面 $z = 2 - x^2$ 的交线关于 Oxy 面的投影柱面方程。



3、曲线方程

两个曲面相交的集合，一般是一条曲线，称其为交线。

曲面 $\sum_1$： $F(x, y, z) = 0$

曲面$\sum_2$： $G(x, y, z) = 0$

1）则交线C 的方程： $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

如：平面与平面的交线是一条直线；

球面与平面的交线是一个圆。

2）曲线的另一种表示是参数方程

曲线可看成是质点作某种运动的轨迹。

如：已知**两点的定比分点公式**：

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad \lambda \neq -1 \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

这是参数方程。

λ 的变动表示动点沿（x_1, y_1, z_1）和（x_2, y_2, z_2）的连线移动。

当 $\dfrac{\lambda}{1+\lambda} = t$ 时，直线的参数方程也可用t 表示：

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \quad t \in (-\infty, +\infty) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

注意：

参数方程表示曲线，对于计算机作图和显示非常简便，现有许多应用软件都采用多项式表示。

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \\ z = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \end{cases}$$

如：圆的一个参数方程 $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \\ z = 2 \end{cases}$

此圆始终在 $z = 2$ 的平面上。

当 $z = 2\theta$时，曲线是一条螺旋线： $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \\ z = 2\theta \end{cases}$

$0 \le \theta < 2\pi$

例5、设曲线 C 的参数为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

试求曲线绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面方程。

思考题:

求直线 $l:\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程。

二、二次曲面

将空间直角坐标系中三元二次方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0$$

所表示的曲面称为二次曲面。

特点：

1）常用

2）许多复杂曲面在一定条件下可以用其近似代替。

二次曲面标准方程的定义：

　　二次曲面的方程中不含交叉项，不同时含有某个变量的一次项和二次项，这类方程称为**二次曲面的标准方程**。

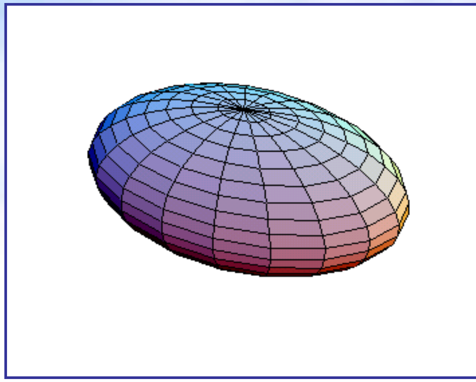
相应的平面称为 **二次曲面**。

截痕法：

　　用坐标面或平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，即可大致了解曲面的形状和性质。

下面用截痕法讨论几个典型标准方程的二次曲面。

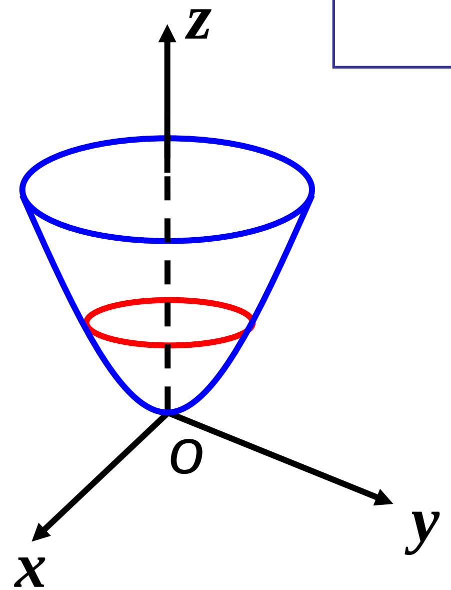
常用二次曲面



1）椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (abc>0)$

2）椭圆抛物面

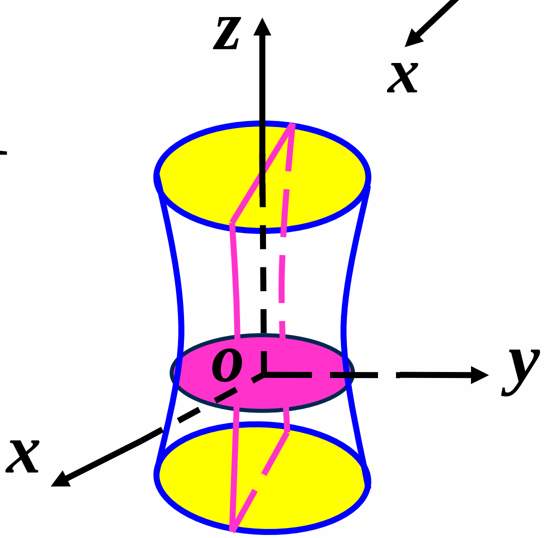
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\quad (ab>0)$$



3）单叶双曲面

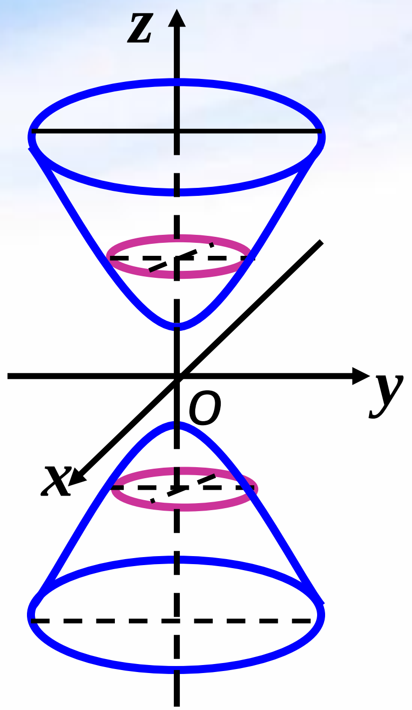
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$(abc>0)$$



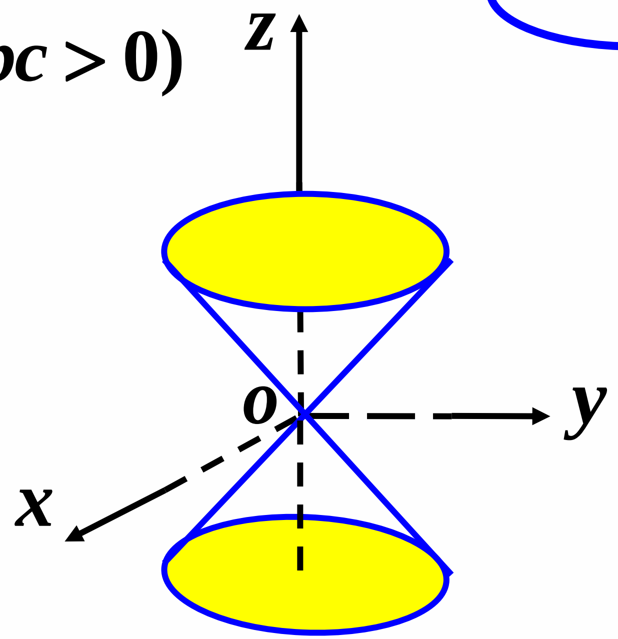
4）双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (abc>0)$$



5）锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \ (abc>0)$$



6）双曲抛物面

$$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (ab > 0)$$