§2 平面和直线

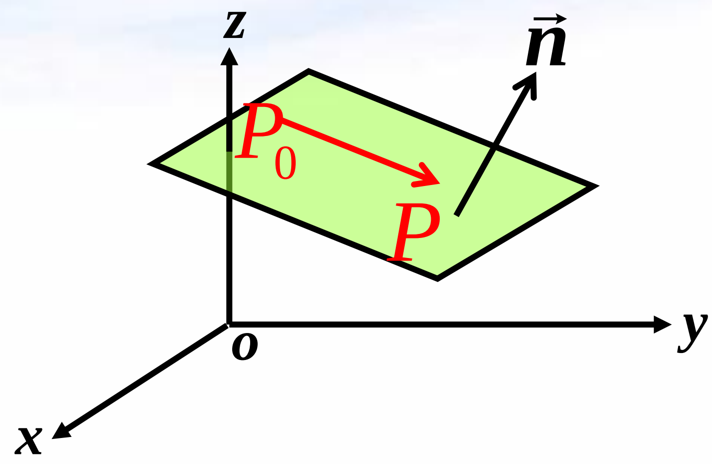
一、平面的点法式方程

立体几何知识告诉我们，给定了与平面垂直的方向和平面上的任意一点，就可以唯一确定这个平面。

定义(法向量)：

与平面垂直方向的非零向量称为这个平面的法向量，记为 $\vec{n}(A, B, C)$.

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为平面上的一个点，



$\vec{n}(A, B, C)$ 为平面的法向量。

平面上任一点 $P(x, y, z)$ ，

则 $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$

即 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$

即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ *

为 平面的点法式方程。$-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

*式变形为 $Ax+By+Cz+D=0$

为 平面的一般式（普通）方程。

说明：

若 A, B, C 有一个或两个为零，即此法向量 $\vec{n}$ 在相应的一个坐标轴上的投影为零，则法向量 $\vec{n}=(A, B, C)$ 垂直于相对应的一个或两个坐标轴。

例1、求过点 $M_0(2, -1, 4)$ 和 y 轴的平面方程。

解：1^0 建立所求平面的点法式方程

2^0 建立平面的一般方程

二、确定平面的另一类条件

不在一条直线上的三个点唯一确定一张平面。

设平面所过的三个点为：

$$P_0(x_0, y_0, z_0),\ P_1(x_1, y_1, z_1),\ P_2(x_2, y_2, z_2),$$

$\therefore$ 该平面的法向量 $\vec{n}$，$\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P_1}$，$\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P_2}$，

$$\therefore \vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$$

假设 $P(x, y, z)$ 为平面上任一点，则由点法式得

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = (\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

称为 平面的三点式方程。

由混合积的定义、性质得

四点共面的条件：$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$

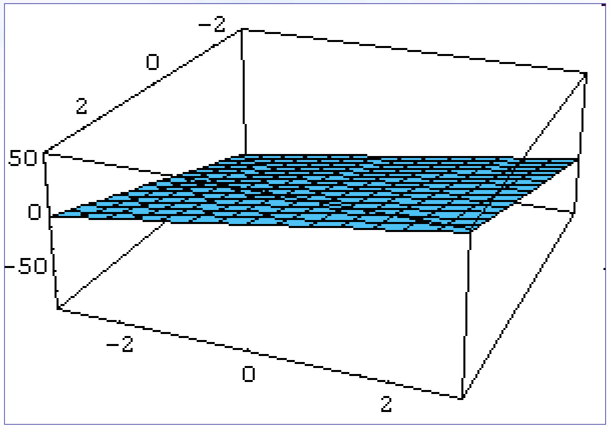
展开后为 $Ax + By + Cz + D = 0$

说明：在实际计算时，可将已知点 P_0, P_1, P_2 的坐标代入平面的一般方程，用待定系数法解出方程，比用三点式方程计算简便。

例2、求过点 A (2, -1, 4) , B (-1, 3, -2) , C (0, 2, 3) 的平面方程。

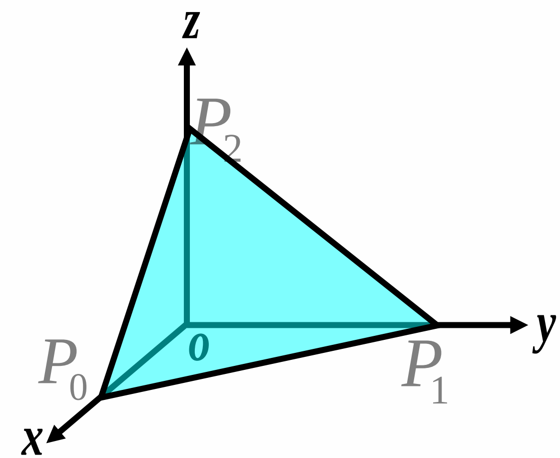
解：1^0 用平面的普通方程

2^0 用平面的点法式方程



特殊情况：

当平面所过的三个点分别来自于三个坐标轴上的点，设为 $P_0(a,0,0)$, $P_1(0,b,0)$, $P_2(0,0,c)$，代入平面的一般式方程为



$$\begin{cases} aA+D=0 \\ bB+D=0 \\ cC+D=0 \end{cases}$$

1）当 a , b , c 均不为零时，平面方程为：

平面截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

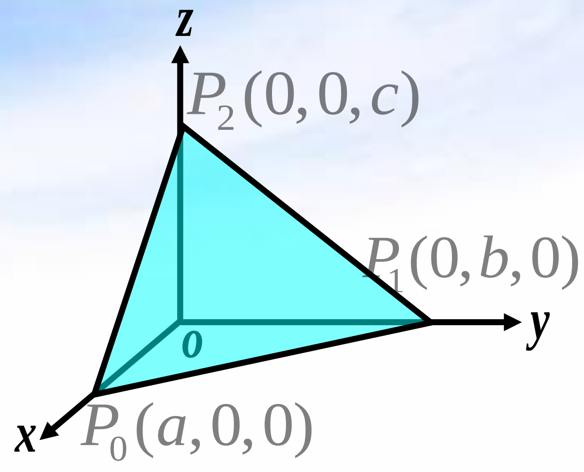
2）当 a, b, c 中只有一个为零时，

所确定的平面为坐标平面

当 $a=0$ 零时，Oyz 平面 $x=0$，

当 $b=0$ 零时，Oxz 平面 $y=0$，

当 $c=0$ 零时，Oxy 平面 $z=0$.



三、直线方程的几种形式

确定空间中的一条直线主要条件有两类

1、确定直线的方向和直线上的一个点

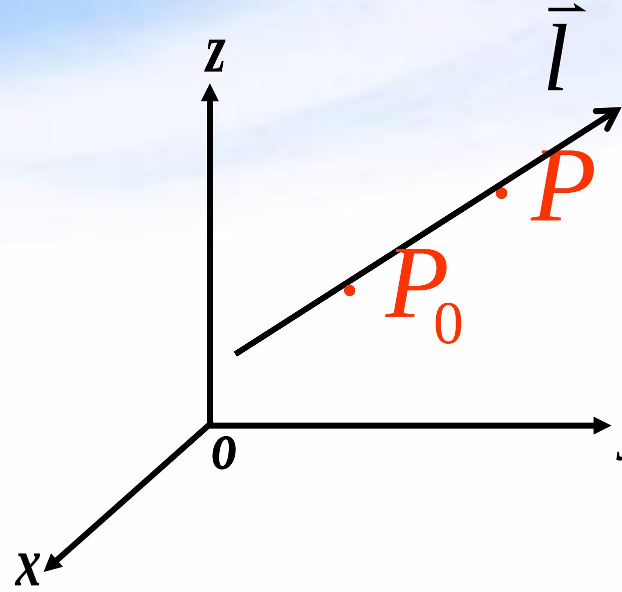
2、确定直线上的两个点

1、设直线的方向向量为 $\vec{l}(l, m, n)$，

直线所过的点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，

∴直线上任何一点 $P(x, y, z)$，

显然 $\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{l}$ 即 $\overrightarrow{P_0P} \times \vec{l} = 0$



即 $$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

称为 直线的对称式方程，或 点向式方程。

说明：若 l, m, n 中有等于零的，如 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

则将上述方程改写为 $$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

如 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{n}$ 则改写为 $$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$$

2、若给定了直线上的两个点 $P_0(x_0, y_0, z_0), P_1(x_1, y_1, z_1)$

则 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的方向就是直线 $\vec{l}$ 的方向向量，

∴由直线的对称式方程得

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

为直线的两点式方程。

3、直线的参数方程

直线的对称式方程中，记 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \quad t \in (-\infty, +\infty) \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

直线的一组方向数

为直线的参数方程。

例3、求直线 $L:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $\pi:2x+y+z-6=0$ 的交点。

4、空间直线 L 可以看做是两张互不平行的平面

$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1$ 与 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2$

相交成的直线，∴空间直线 L 上的任何点的坐标应

同时满足这两个平面的方程，

即应满足方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ $*$

反过来，如果点 M 不在直线 L 上，那么它不可能

同时在平面 π_1 和平面 π_2 上，即它不满足 $*$ 式。

∴直线 L 可用方程组 $*$ 即联立方程组表示，

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

称为**空间直线的一般（普通）方程**。

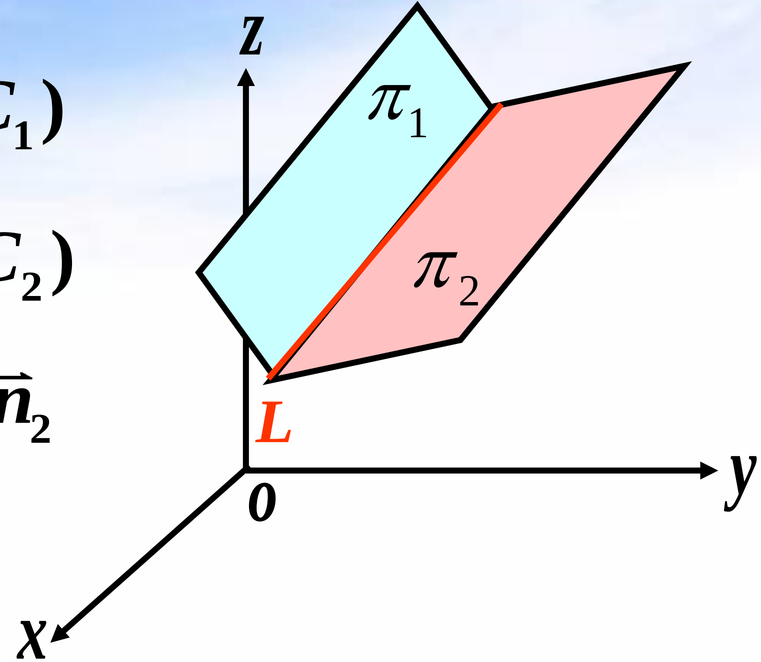
平面 π_1 的法向量 $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$

平面 π_2 的法向量 $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$

直线 L 的方向向量 $\vec{l} \perp \vec{n}_1$,$\vec{l} \perp \vec{n}_2$

即 $\vec{l} \parallel (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$

$\therefore$ 可取 $\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$



例4、用对称式方程及参数方程来表示直线

$$L\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 & \pi_1(\vec{n}_1) \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 & \pi_2(\vec{n}_2) \end{cases}$$

例5、一直线 l 通过点 $A\,(1, 2, 1)$，且垂直于直线

$$l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$ 又与直线 $l_2: \frac{x}{2} = y = -z$ 相交，

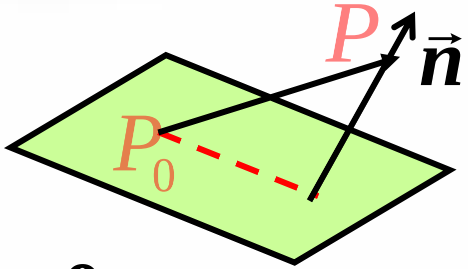
求该直线 l 方程。

解：1^0 用直线的点向式方程

2^0 用参数方程

四、点到平面、直线的距离

1、点到平面的距离



设点法式的平面方程为

$$\pi(\vec{n}) \quad \vec{n}(A, B, C)$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

空间上任一点 $P(x^*, y^*, z^*)$，

求 P 到 π 的距离 d：

设平面的单位向量为 $\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

由内积定义

$$d = \left|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}_0\right| = \frac{\left|Ax^* + By^* + Cz^* + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2、点到直线的距离

由外积的几何意义得

$$d = \left\| \overrightarrow{P_0P} \times \vec{l}_0 \right\|$$