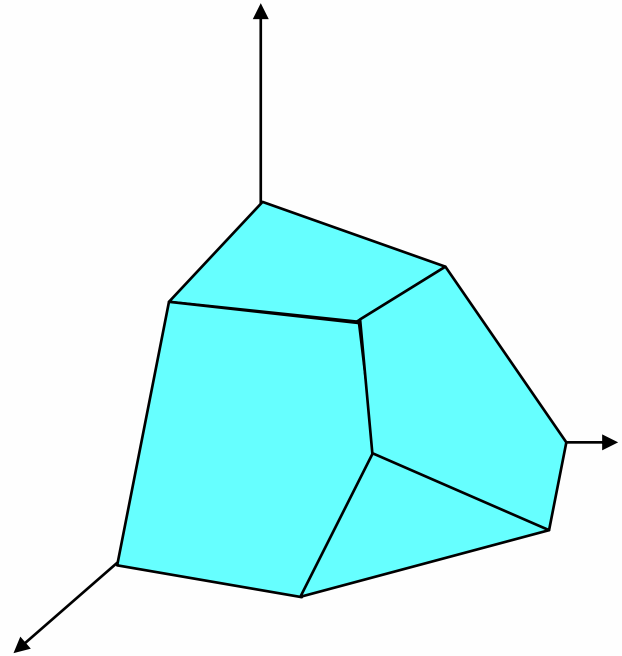
第六章 空间解析几何

平面解析几何是通过坐标法, 把平面上的点与一对有序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题。空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的，它是在三维坐标系中，用代数方法研究空间曲面和曲线性质的一个数学分支。

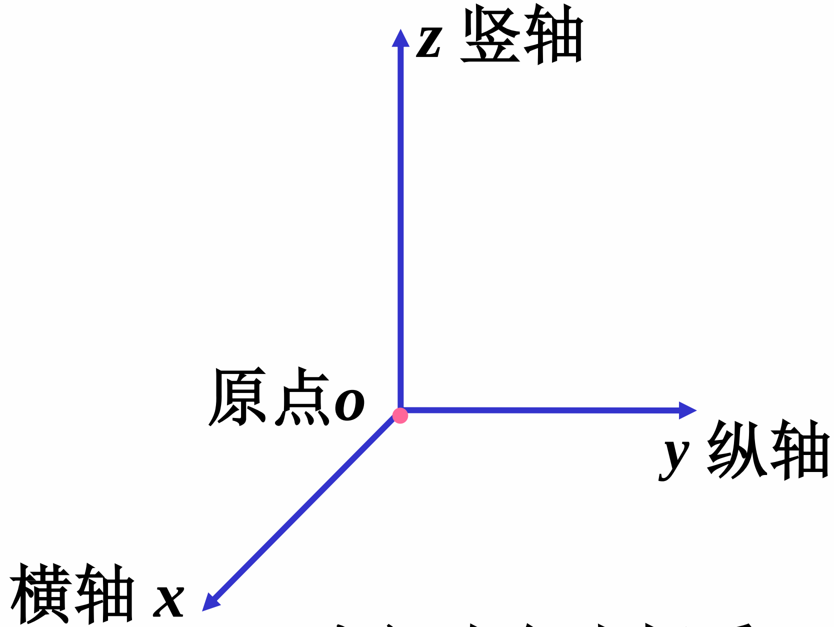


§1 向量的外积与混合积

一、空间直角坐标系

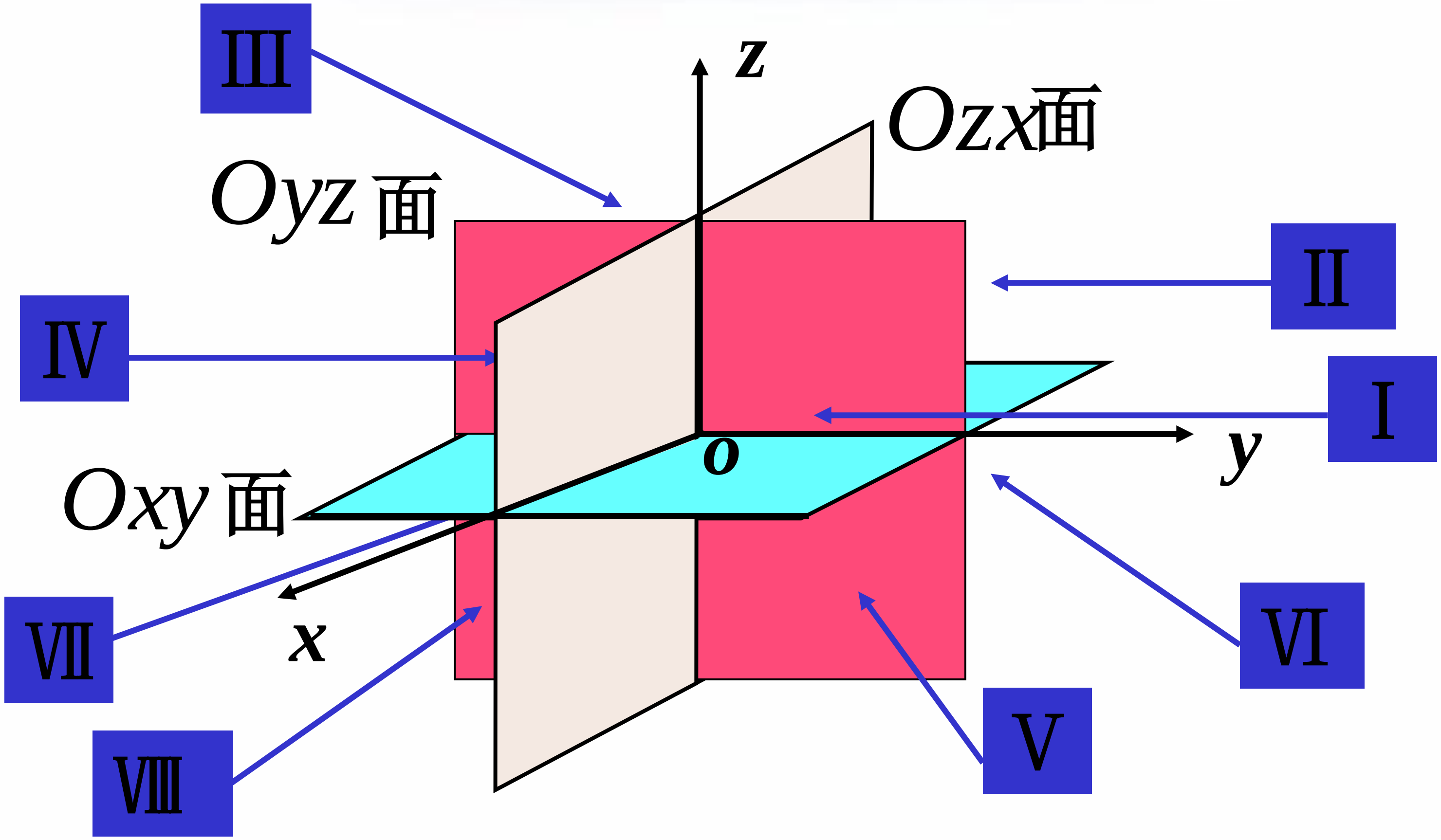
三个坐标轴的正方向符合右手系。

即以右手握住 z 轴，右手的四个手指从正向 x 轴以$\pi/2$ 角度转向正向 y 轴时， 大拇指的指向就是 z 轴的正向。



空间直角坐标系

空间直角坐标系共有八个卦限



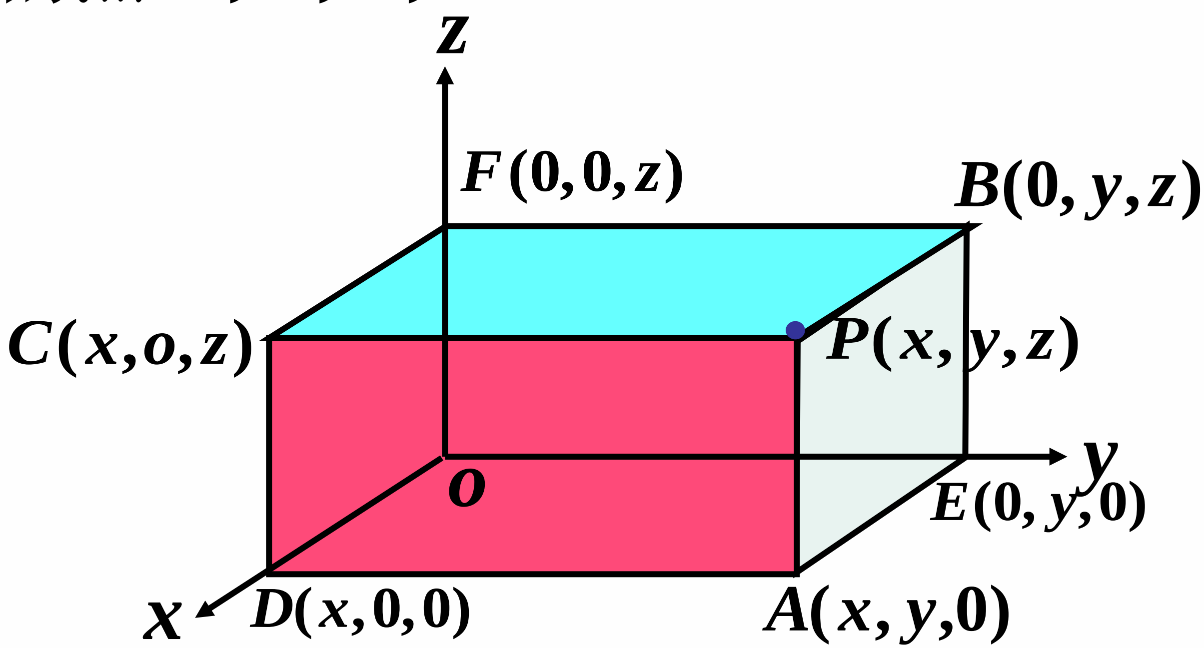
空间的点 $\xleftrightarrow{\text{1-1对应}}$ 有序数组 (x, y, z)

特殊点的表示:

$O(0,0,0)$

坐标轴上的点 $D, E, F,$

坐标面上的点 $A, B, C,$



二、向量的概念及性质

1、向量的定义 具有大小和方向的量。

空间上的**向量**：有向线段（长度和方向）

向量表示：$\overrightarrow{OM}$ $\vec{a} \in R^3$ $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\vec{a}(x, y, z)$

说明：

1）本书所研究的向量，只考虑其大小和方向，

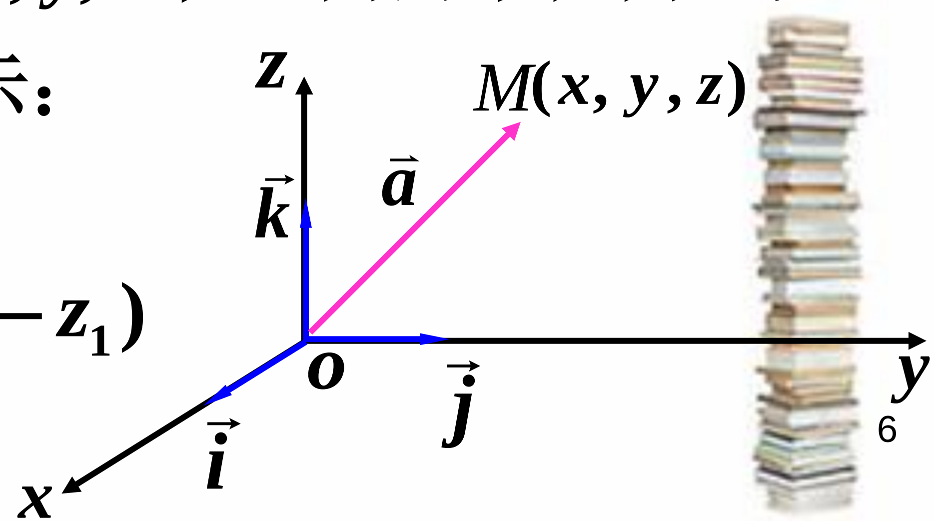
不考虑其起点；

2）$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示沿 x, y, z 轴正向的单位向量；

3）R^3中向量的坐标表示：

$\overrightarrow{M_1M_2}$

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$



2、向量的模

定义：设 $\vec{x}$ 是 R^n 上的任意向量，定义 $\vec{x}$ 的长度为

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$ 称为 $\vec{x}$ 的模或范数。

当 $\|\vec{x}\| = 1$ 时，称 $\vec{x}$ 为单位向量。

说明：1）在空间三维坐标系中：$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

2）模为零的向量为零向量 $\vec{0}$ ，

零向量的方向是任意的。负向量为 $-\vec{x}$

3）向量 $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 的模为

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3、向量的方向余弦

设非零向量 $\vec{x}$ 与三坐标轴的正向的夹角

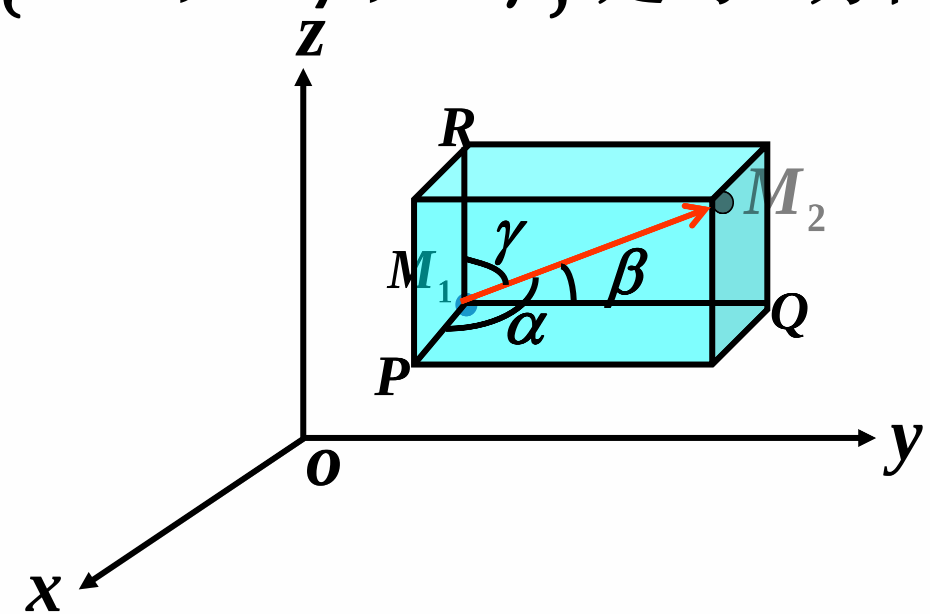
α,β,γ, 称为方向角,

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\vec{x}$ 的方向余弦。

说明:

1）方向余弦表示向量的方向;

2）向量 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是与 $\vec{x}$ 方向相同的单位向量;

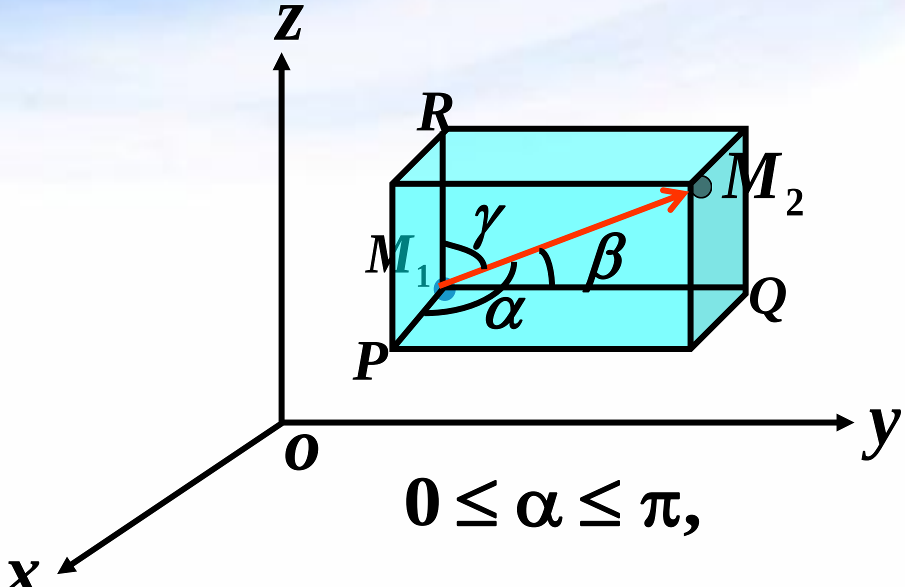


3）如 $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$

则 $\cos\alpha = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$

$$\cos\beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$



$0 \le \alpha \le \pi,$

$0 \le \beta \le \pi,$

$0 \le \gamma \le \pi.$

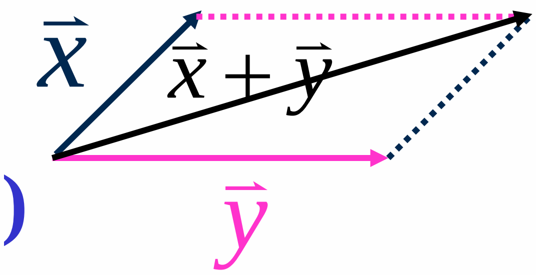
$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

表示线段OM距离原点O一个单位的点。

4、 向量的运算法则

设 $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ $\vec{y}=(y_1, y_2, y_3)$

1）加法 （平行四边形法则）



即 $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

满足 $a)\ \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

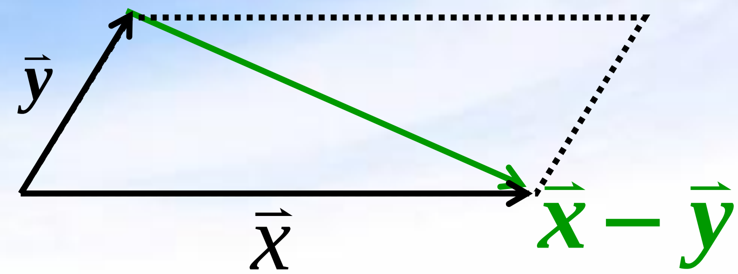
$b)\ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$

$c)\ |\vec{x}+\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$

$|\vec{x}-\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$

2）减法

即 $\vec{x}-\vec{y}=\vec{x}+(-\vec{y})$



$$=(x_1-y_1,\, x_2-y_2,\, x_3-y_3)$$

3）数乘

λ 为任意实数， 则 $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

满足 $a)\ \lambda(\mu\vec{x})=\mu(\lambda\vec{x})=(\lambda\mu)\vec{x}$

$b)\ (\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$

$\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$

5、 向量的内积(点积)

1） 定义：对任意 $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$， $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的内积为

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

说明：从定义可知，内积是只有大小没有方向的的量（即数量），所以也称数量积。

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

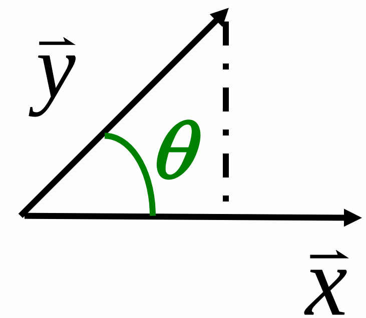
三维空间：

设 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

则 $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

2） 任意两向量之间的夹角定义:

$$\cos\theta=\frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}\qquad 0\le\theta\le\pi,$$ θ为$\vec{x}$与$\vec{y}$的夹角。



$$\therefore\ \vec{x}\cdot\vec{y}=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos\theta$$

称为$\vec{y}$在$\vec{x}$方向上的投影。

结论：两向量的内积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积。

3）内积的重要性质:

$$\vec{x}\perp\vec{y}\Leftrightarrow\vec{x}\cdot\vec{y}=0$$

即 $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$

例1、设空间两点：$P_1(2,-2,5),\ P_2(-1,6,7)$.

求：1）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$在三个坐标轴上的投影；

2）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模；

3）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦；

4）与向量$\overrightarrow{P_1P_2}$方向一致的单位向量；

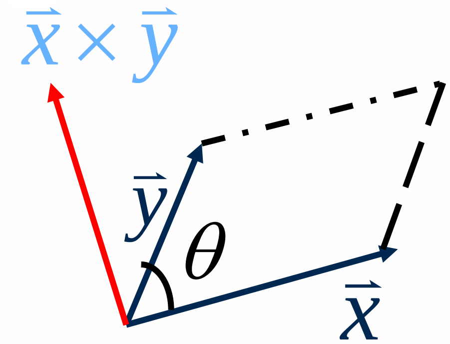
5）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$在向量$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,2,1\}$上的投影；

6）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$在向量$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,2,1\}$上的投影向量。

6、 向量的外积(叉积)

1） 定义：设 $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ $\vec{y}=(y_1, y_2, y_3)$

$$\vec{z}=\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

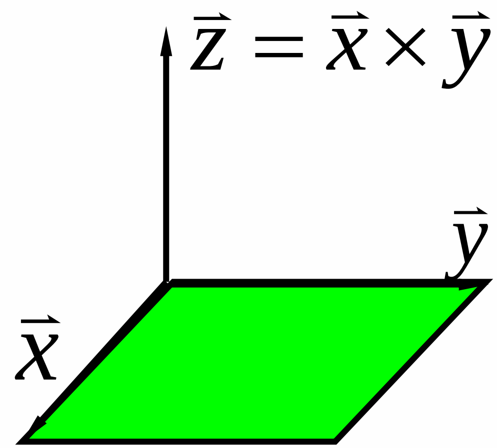


$$=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

2）外积模长的定义：

对任意 $\vec{x}, \vec{y}\in \boldsymbol{R}^3$，

$$\|\vec{x}\times\vec{y}\|=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\sin\theta$$



3）外积的方向:

对任意 $\vec{x},\vec{y}\in R^3$，$\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{x}$, $\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{y}$

定理: $\vec{x}\,/\!/\,\vec{y}\iff\vec{x}\times\vec{y}=0$

证: "$\Rightarrow$" $\because\ \vec{x}\,/\!/\,\vec{y}\quad\therefore\theta=0\ or\ \pi$

$\therefore\|\vec{x}\times\vec{y}\|=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\sin\theta=0\Rightarrow\vec{x}\times\vec{y}=0$

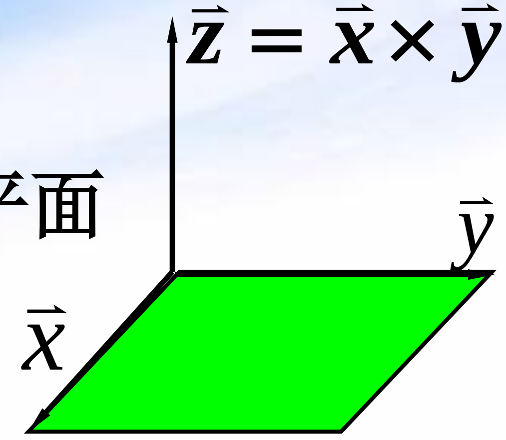
"$\Leftarrow$" $\because\ \vec{x}\times\vec{y}=0$ 又 $\because\|\vec{x}\|\neq0\ \ \|\vec{y}\|\neq0$

$\therefore\sin\theta=0$ 即 $\theta=0\ or\ \pi\ \Rightarrow\vec{x}\,/\!/\,\vec{y}$

注意: 三维空间中: $\vec{x}\,/\!/\,\vec{y}\ (\vec{x}\times\vec{y}=0)$

对应分量成比例，即 $\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=\dfrac{x_3}{y_3}$

4）外积的几何意义:



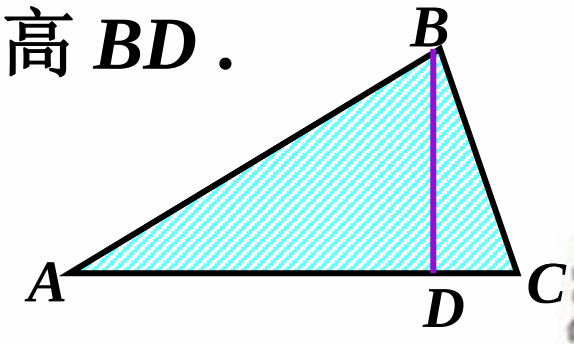
$\vec{x}\times\vec{y}$是一个与$\vec{x}$和$\vec{y}$所决定的平面垂直的向量。

$\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}$ 构成一个右手系:

右手伸平（竖），四指指向 $\vec{x}$方向，再顺势向 $\vec{y}$方向弯曲，则大拇指所指的方向就是 $\vec{x}\times\vec{y}$的方向，其长度就是其模，在数值上正好等于以 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 为邻边的平行四边形的面积。

例2、设 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ 试在 $\vec{a},\vec{b}$ 决定的平面内求与 $\vec{a}$ 正交（垂直）的单位向量。

例3、在顶点为 $A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD .



7、向量的混合积

1）定义：对任意向量 $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$

$\vec{y}=(y_1, y_2, y_3)$ $\vec{z}=(z_1, z_2, z_3)$

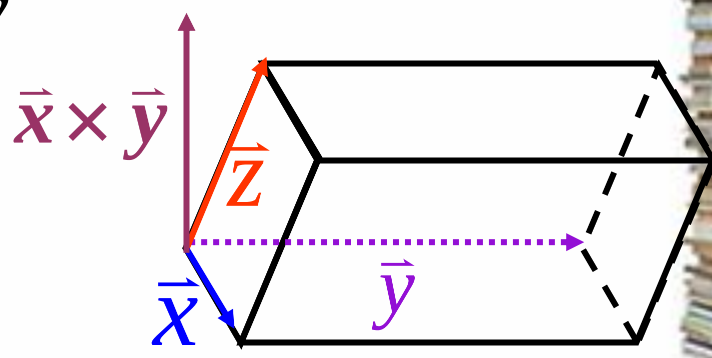
称 $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ 为 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ 的混合积。

2）$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ 的混合积的几何意义

是以 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ 为邻边的平行六面体的体积，

$(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}$ 是将 $\vec{z}$ 在 $\vec{x}\times\vec{y}$

方向上的投影与 $|\vec{x}\times\vec{y}|$ 相乘。



3）任意 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in R^3$共面 $\Leftrightarrow (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}=0$

$\Downarrow$ 等价于

R^3中任意4 个点 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3)$ 共面。

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}=0$$

4）R^3中任意4 个点 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3)$构成的四面体体积为

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}$$

符号的选择须与行列式的符号一致。