第三章 一元函数积分学

上一章我们讨论了一元函数的微分运算，这一章将讨论微分的逆运算—积分学。

因为我们不仅需要解决已知函数导数(或微分)的问题，而且往往需要解决与导数(或微分)运算正好相反的问题：

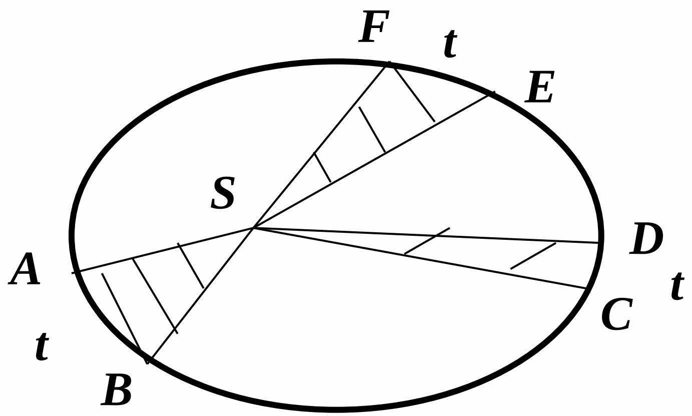
已知物体运动速度 $v(t)$，如何求物体运动的路程 $s(t)$；已知曲线上各点的切线斜率 $k(x)$ 时，又如何求出曲线方程；在经济管理中，类似的问题还可提出很多。

§1　定积分的概念性质基本定理

一、实际问题

1、*Kepler* 第二定律 （定积分思想的雏形）

联结行星和太阳之间的焦半径在相等的时间内扫过相等的面积。



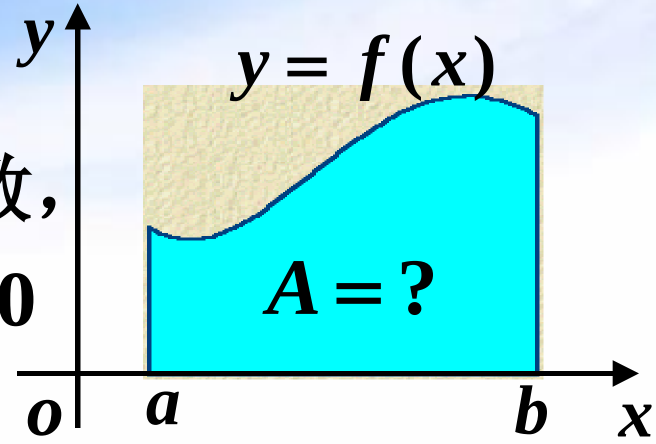
关键：计算椭圆扇形的面积

2、面积问题

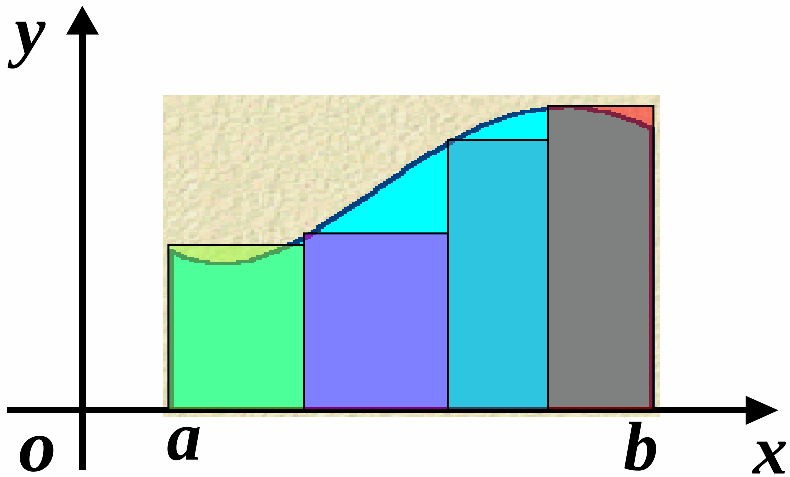
设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的非负函数，

由 $y = f(x)$， $x = a, x = b, y = 0$

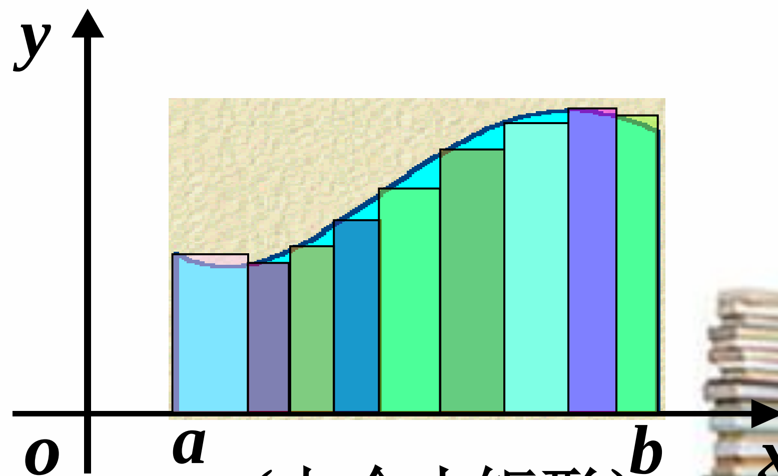
围成的图形为曲边梯形。



用矩形面积近似取代曲边梯形面积。



（四个小矩形）



（九个小矩形）

小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积。

作区间 $[a, b]$ 的一个分割：

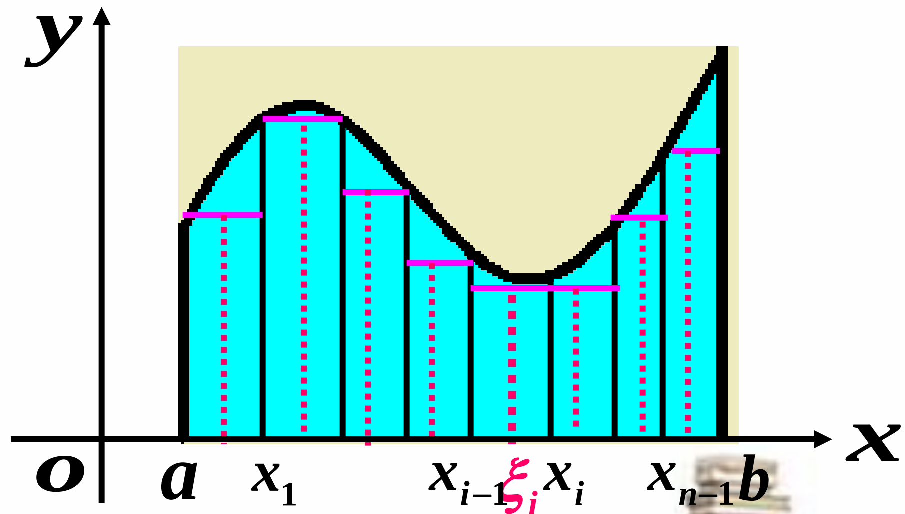
$$D: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$，

长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，

以 Δx_i 为底，$f(\xi_i)$ 为高的

小矩形面积：$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$



n 个小矩形面积相加得

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda = \max_i \Delta x_i$ 如果分割越细，即 $\lambda \to 0$ 时，

上述和式的极限存在，则曲边梯形的面积

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

二、定积分的定义

定义　设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数，对 $[a,b]$ 的

任意分割 $D: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，$(i = 1,\cdots,n)$

并记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

作和式 $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 Riemann 和，

记 $\lambda = \max_i \Delta x_i$ ，

如果 $\lambda \to 0$ 时，Riemann 和的极限存在，

称 f 是 $[a,b]$ 上的可积函数，

称此极限为 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分，

简称 定积分　记作 $\int_a^b f(x)dx$

即

积分上限　积分变量

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分号　积分下限　被积函数　被积表达式

说明

1）定积分是面积的代数和，曲边梯形的面积就是定积分的几何意义；

2）积分值与积分变量符号的选取无关，即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

但与被积函数及积分区间有关；

3）定义中区间的分法及 ξ_i 的取法是任意的；

4）规定 $\int_a^a f(x)dx = 0$

当 $a > b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

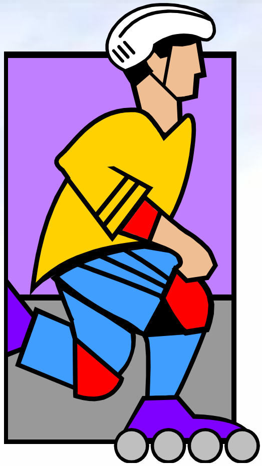
5）计算面积的途径（即计算定积分）

分割，取点，求和，取极限。

提出两个基本问题：

1）什么样的函数可积？

2）怎样求可积函数的定积分？



三、存在定理

定理1 当函数 f 在 $[a, b]$ 上连续时，称 f 在 $[a, b]$ 上可积。

定理2 设 f 是 $[a, b]$ 上的有界函数，且只有有限个间断点，则 f 在 $[a, b]$ 上可积。

例1、利用定义计算 $\int_0^1 e^x dx$

解： 不妨把 [0, 1] n 等分，$x_i = \dfrac{i}{n}$ $\qquad \Delta x_i = \dfrac{1}{n}$

取 $\xi_i = x_i = \dfrac{i}{n} \qquad i = 1, \cdots, n$

$$\therefore \int_0^1 e^x dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{n}{n}})}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = e - 1$$

例2、设函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续，且取正值。

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$

$$左式=\lim_{n\to\infty} e^{\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}=右式$$

四、定积分的性质

设 f 和 g 是 $[a, b]$ 上的可积函数，

性质1（线性性质）

对任意常数 α、β

$\alpha f+\beta g$ 也是 $[a, b]$ 上的可积函数，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

（可推广到有限个线性组合）

性质2（可加性）

对任意一点 $c\in[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

补充：无论 a、b、c 的相对位置如何，上式总成立，

如 $a<b<c$

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

则 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

性质3（单调性）

如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \le g(x)$

则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

性质4 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

性质5（积分中值定理）

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则在 $[a, b]$ 上

至少存在一点 ξ ，$\ni$ $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

$f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 是 $[a, b]$ 上的平均值。

证：∵函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

∴在 $[a, b]$ 上必 $\exists M$、m $\ni m \le f(x) \le M$

由单调性 $\Rightarrow \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

再由闭区间连续函数的介值定理

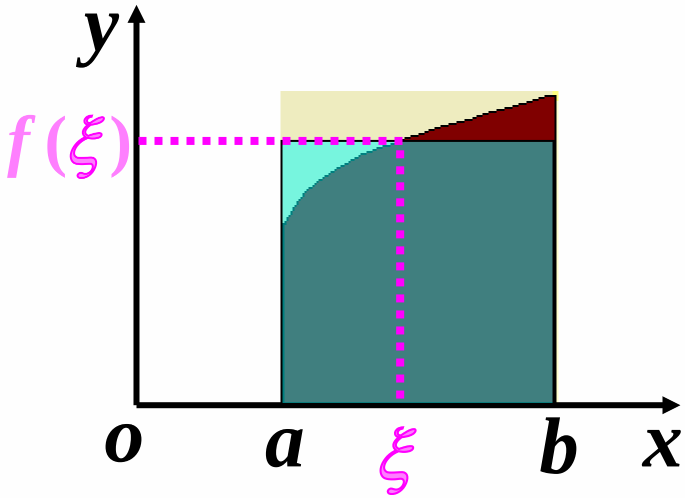
至少存在一点 $\xi \in [a, b]$

$$\ni f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b)$$

积分中值定理的几何解释

在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使得以区间 $[a, b]$ 为底边，以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形面积。



例3、证明 $\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx < \sqrt{2}$

证：设 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 上连续，

在 $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 上必能达到其 M 和 m ，有

$m \le f(x) \le M$ 又 $\because f'(x) = -2xe^{-x^2}$

而 $f(0)=1$， $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-\frac{1}{2}} < 1$ $\therefore e^{-\frac{1}{2}} \le f(x) \le 1$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{2}}dx < \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx < \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 1dx$$

$$\therefore \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx < \sqrt{2}$$

例4、设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt$

解： 由积分中值定理

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt$$

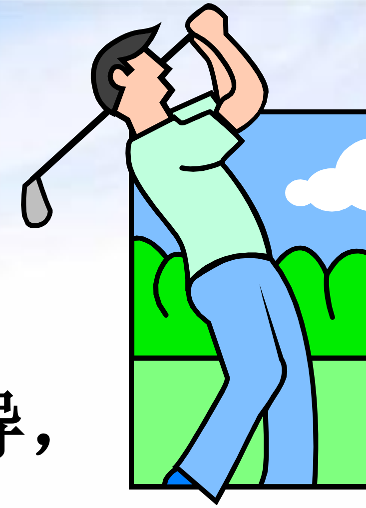
$$=\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)(x+2-x) \qquad \xi\in[x, x+2]$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)$$

$$=6$$

五、积分上限函数及其导数



定理 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

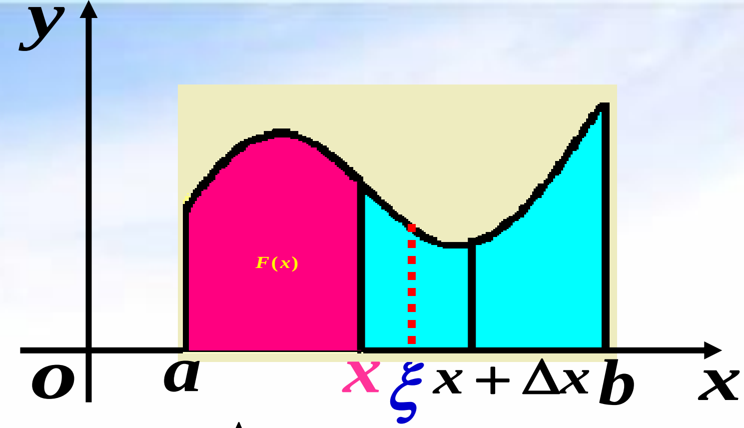
则函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导，

且 $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad x \in [a, b]$

称 $\int_a^x f(t)dt$ 为变上限的积分，

或为 $f(x)$ 的积分上限函数。

证： $F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$



$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\Rightarrow \Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$= f(\xi)(x+\Delta x-x) \quad \xi\in[x,x+\Delta x]$$

$$\therefore F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) \quad \text{当 } \Delta x\to 0, \ \xi\to x$$

又 $\because f(x)\in C_{[a,b]}$ 即得 $F'(x)=f(x)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

补充：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

则有 1）当 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导时，

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f[g(x)]g'(x)$$

2）当 $g(x)$，$h(x)$ 均在 $[a, b]$ 上可导时，

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

$$= f[g(x)]g'(x) - f[h(x)]h'(x)$$

例5、设 $F(x)=\int_{\sin 2x}^{x^2}\dfrac{\ln(1+t^2)}{1-t^2}dt$ 求 $F'(x)$

例6、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t})dt}{\sin^2 x}$

例7、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$，

证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

例8、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(x)<1$，

证明 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $[0, 1]$ 上只有一个解。

六、原函数

原函数的定义：

设 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的函数，若存在函数 $F(x)$，使其在 I 上的任一点，都有 $F'(x) = f(x)$ or $dF(x) = f(x)dx$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 的一个**原函数**。

例：$(\sin x)' = \cos x$

sin$x$ 是 cos$x$ 的一个原函数；

$(x^2)' = 2x$

x^2 是 $2x$ 的一个原函数。

再如 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ，$x\in[a,b]$，$f(x)\in R_{[a,b]}$，

则 $F'(x)=f(x)$，

$\therefore F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 正是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数 .

如 $\int_a^x \frac{\sin t}{t}dt$ 是 $\frac{\sin x}{x}$ 的一个原函数。

原函数存在定理：

如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则在 I 上 $f(x)$ 的原函数一定存在。

问题： 1）原函数是否唯一？

2）若不唯一，它们之间有什么联系？

原函数的说明：

1）$\because [F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$ C 为任意常数

$\therefore F(x)+C$ 都为 $f(x)$ 原函数。

2）若 $G(x)$ 和 $F(x)$ 都为 $f(x)$ 的原函数，

则 $G(x)-F(x)=C$ C 为任意常数

证：$\because [F(x)-G(x)]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$

$\therefore F(x)-G(x)=C$ C 为任意常数

七、微积分的基本定理

Newton-Leibniz 公式：

设 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数，F 是 f 的一个原函数，

则 $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

证：记 $G(x) = \int_a^x f(t)dt$　　由定义可知

G 是 f 的一个原函数，又 F 是 f 的一个原函数，

$\therefore G(x) = F(x) + C$　　当 $x \in [a, b]$ 时，

恒有 $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

取 $x = a$ 得 $C = -F(a)$

取 $x = b$ 得 $\int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$

Newton-Leibniz 公式的意义

例9、计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx$

例10、计算 $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx$

例11、计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$

解：原式 $=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$　　对？　错？