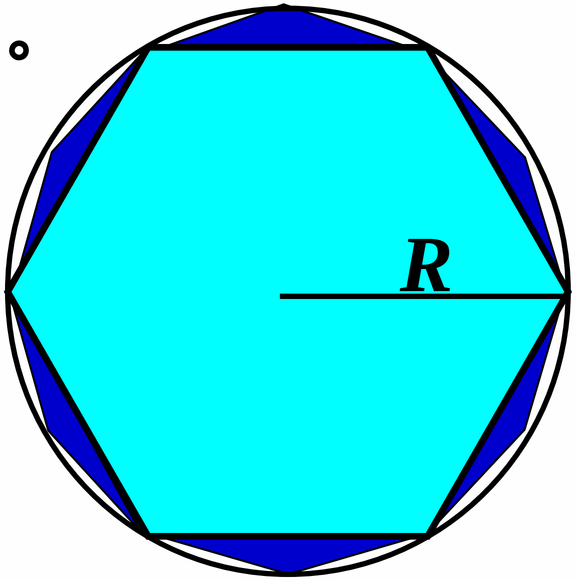
第九章 级数

§1 数项级数

级数是研究函数的表示、性质及进行数值计算的一种工具。是以极限理论为基础的。



一、问题的提出

1、计算圆的面积

正六边形的面积 s_1

正十二边形的面积 s_1+s_2

正 3×2^n 形的面积 $s_1+s_2+s_3$

$$A=s_1+s_2+\cdots+s_n+\cdots$$

2、 $$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

悖论：从“正确”的前提出发，经过“正确”的推理，得出矛盾或荒谬的结论。如：

“万物皆数”学说认为“一切都可以归结为整数及整数比”，这是“正确”的前提。

根据勾股定理及逻辑推理，边长为 1 的正方形的对角线之长却不能表示为整数的比。

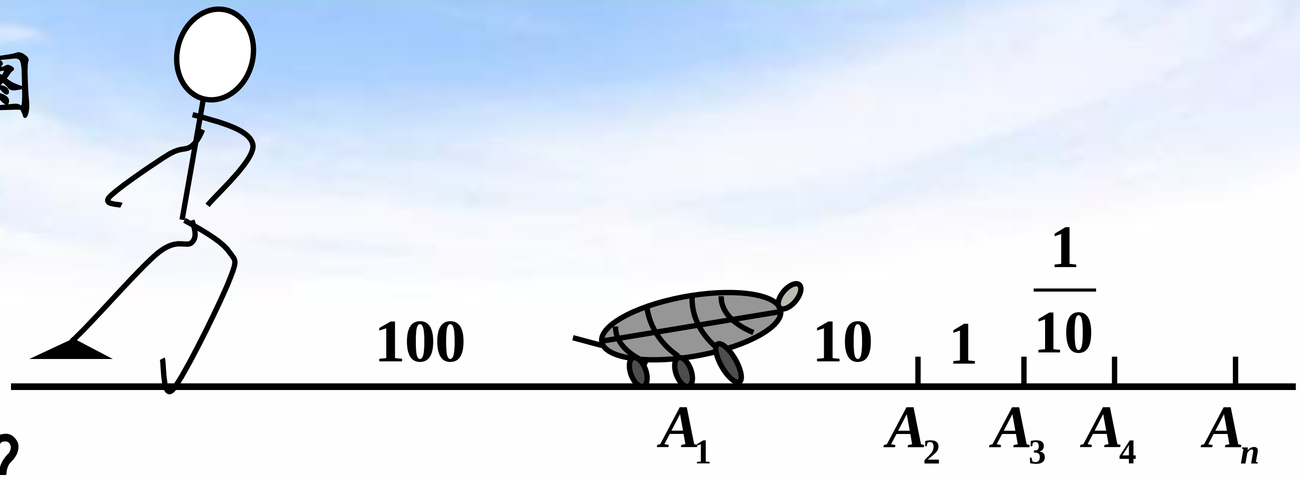
这是“正确”的推理，但结论却是与前提互相矛盾。

芝诺悖论：（之一）

阿基里斯（Achilles）追不上乌龟

阿基里斯是古希腊传说中跑得很快的神，而乌龟是爬得很慢的动物。芝诺却说，他可以证明，如果让乌龟先爬出一短距离，那阿基里斯永远也追不上乌龟。

芝诺的证明如图



问题出在哪里?

分析:阿基里斯追上乌龟所走过的路程为

$$s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots$$

记 $s_n = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n} = 110 + \dfrac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$

当$n \to \infty$越来越大时，s_n越来越接近s,

当$n \to \infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1000}{9}$ $\quad s = \dfrac{1000}{9}(m)$

一、级数的概念

1、级数的定义

定义 一般地，设给定一个数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$

则式子 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$

一般项

称为**无穷级数** 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$

其中 x_n 称为此级数的通项或一般项，x_1 为级数的首项。

如果

$$x_n = \begin{cases} \text{均为常数(一列实数)，则称} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \text{ 为常数项级数} \\ \text{为函数，则称为函数项级数 记为 } \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \end{cases}$$

首先讨论常数项级数

定义级数的部分和（即前 n 项和）

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad k = 1, \cdots, n$$

定义

1）如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$

收敛于有限项 s 即 $\lim_{n\to\infty} S_n = s$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛且称它的和为 s. 记为 $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

2）如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，

即 S_n 没有极限 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

注意 1）级数的余项

$$r_n = s - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$$

2）给定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，总可以按 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

求得其部分和数列 $\{S_n\}$.

3）反之给定的数列 $\{S_n\}$，

可令 $x_1 = S_1$，$x_2 = S_2 - S_1$，$\cdots$

$$x_n = S_n - S_{n-1}, \quad \cdots$$

从而求得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

例1、 讨论几何级数的敛散性。

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

解：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & |q| > 1 \\ \infty & q = 1 \\ \text{极限不存在} & q = -1 \end{cases}$$

∴ 由级数收敛定义得

当 $|q| < 1$ 时， 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛；

其和为 $\dfrac{a}{1-q}$， 即 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \dfrac{a}{1-q}$.

当 $|q| \geq 1$ 时， 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散。

$$\text{如}\quad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \end{array}\right\} \text{几何级数，且收敛，}$$

但首项不同

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3 \qquad a=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2 \qquad a=\frac{2}{3}$$

无穷级数收敛性举例：**Koch**雪花。

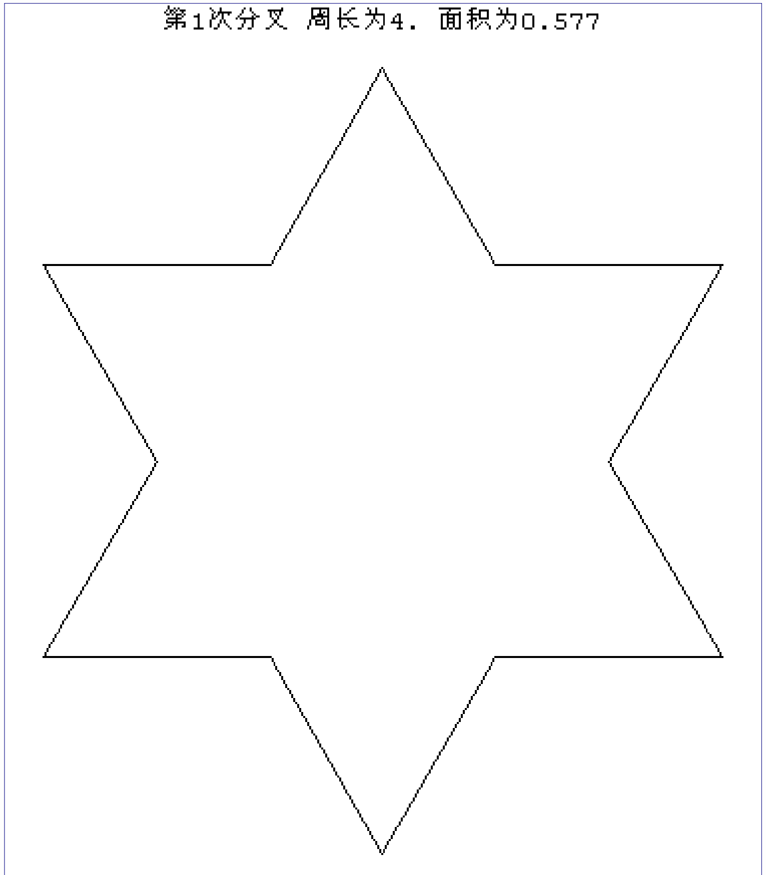
做法：先给定一个正三角形，然后在每条边上对称的产生边长为原边长的1/3 的小正三角形，如此类推在每条凸边上都做类似的操作，我们就得到了面积有限而周长无限的图形——“ **Koch**雪花 ” .

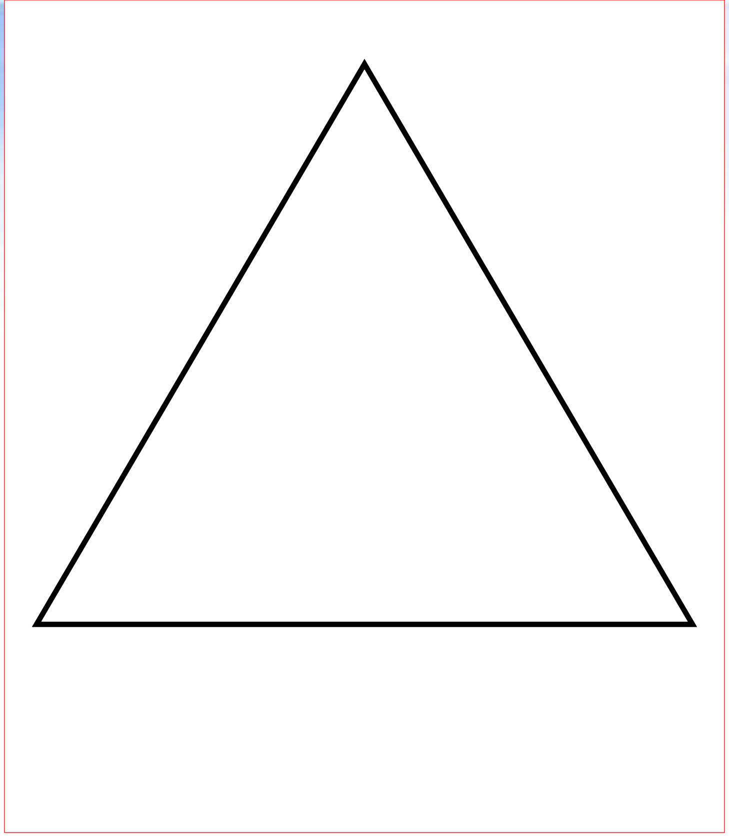
观察雪花分形过程：

设三角形周长为 $P_1 = 3$

面积为 $A_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

第一次分叉:





周长为 $P_2 = \dfrac{4}{3} P_1$

面积为 $A_2 = A_1 + 3 \cdot \dfrac{1}{9} \cdot A_1$,

依次类推

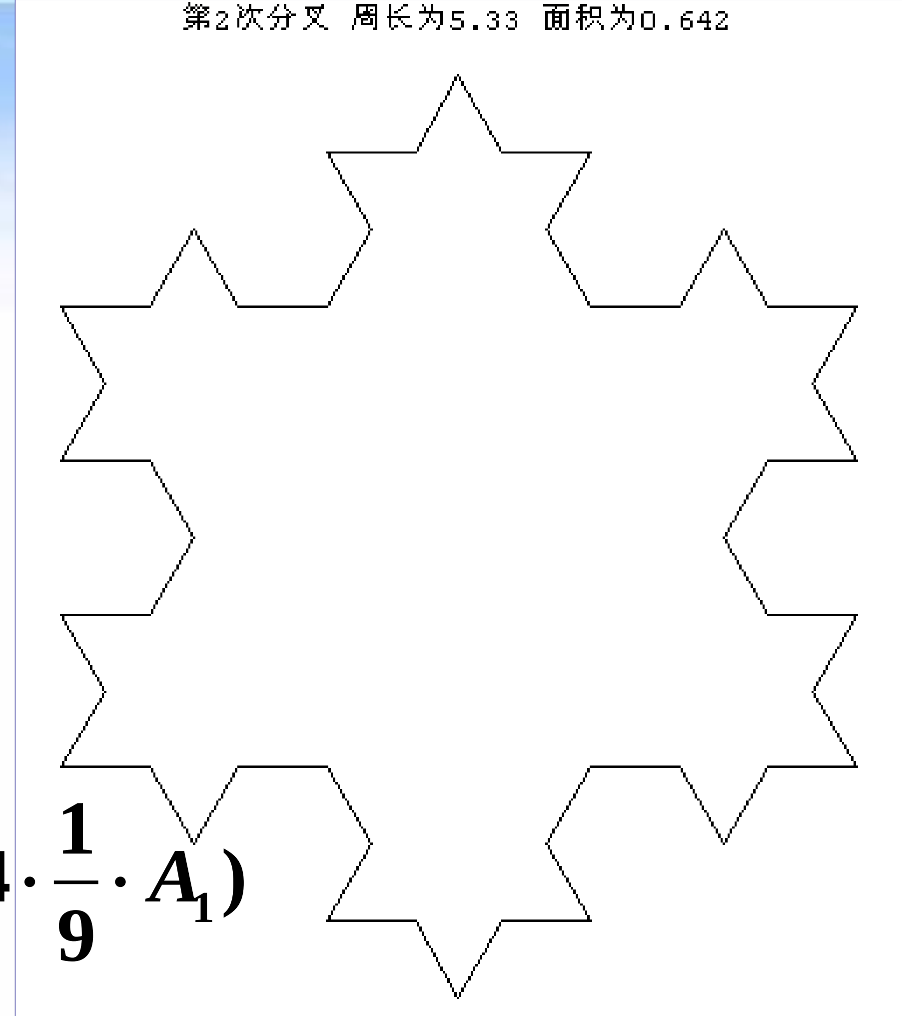
周长为 $P_3=\frac{4}{3}P_2=\left(\frac{4}{3}\right)^2 P_1$

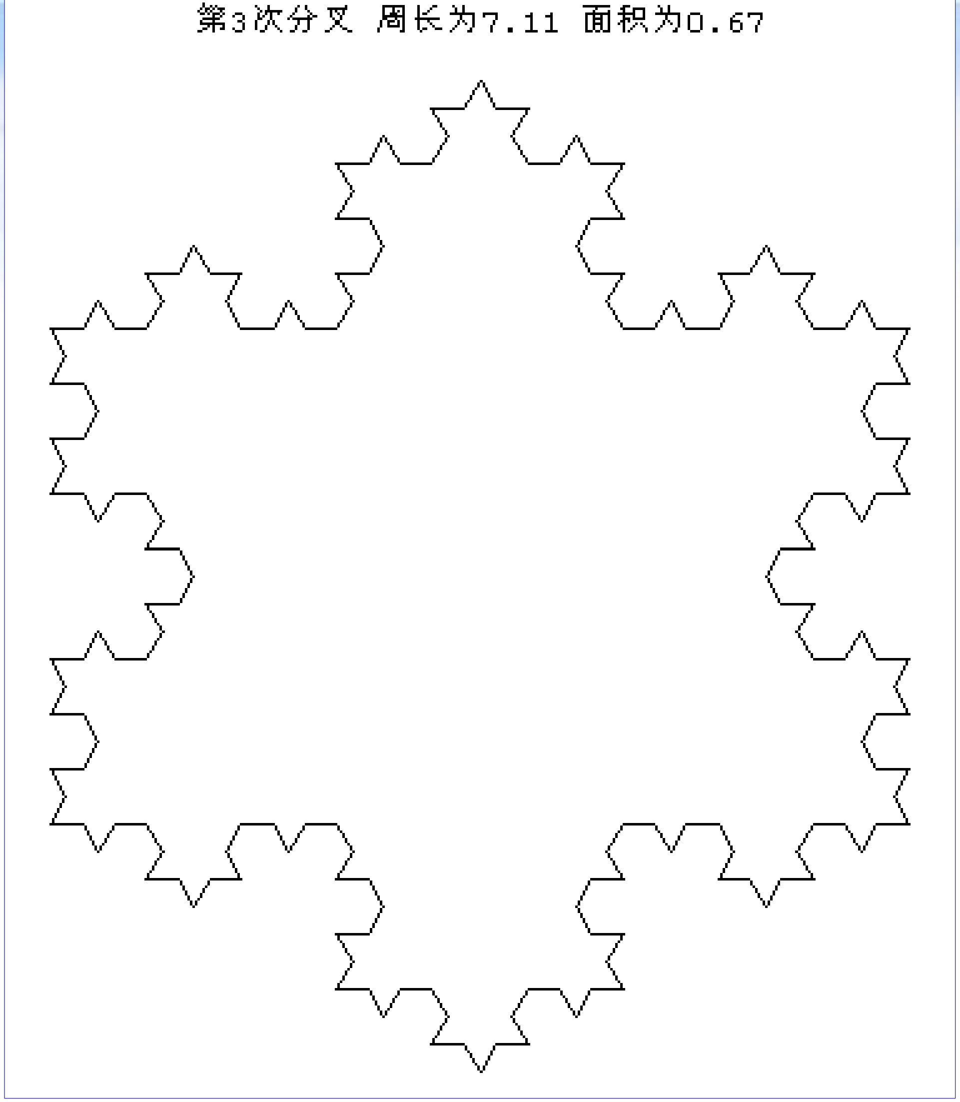
面积为

$$A_3=A_2+3\cdot\frac{1}{9}\cdot A_2$$

$$=A_1+3\cdot\frac{1}{9}\cdot A_1+3\cdot\frac{1}{9}\cdot(3\cdot 4\cdot\frac{1}{9}\cdot A_1)$$

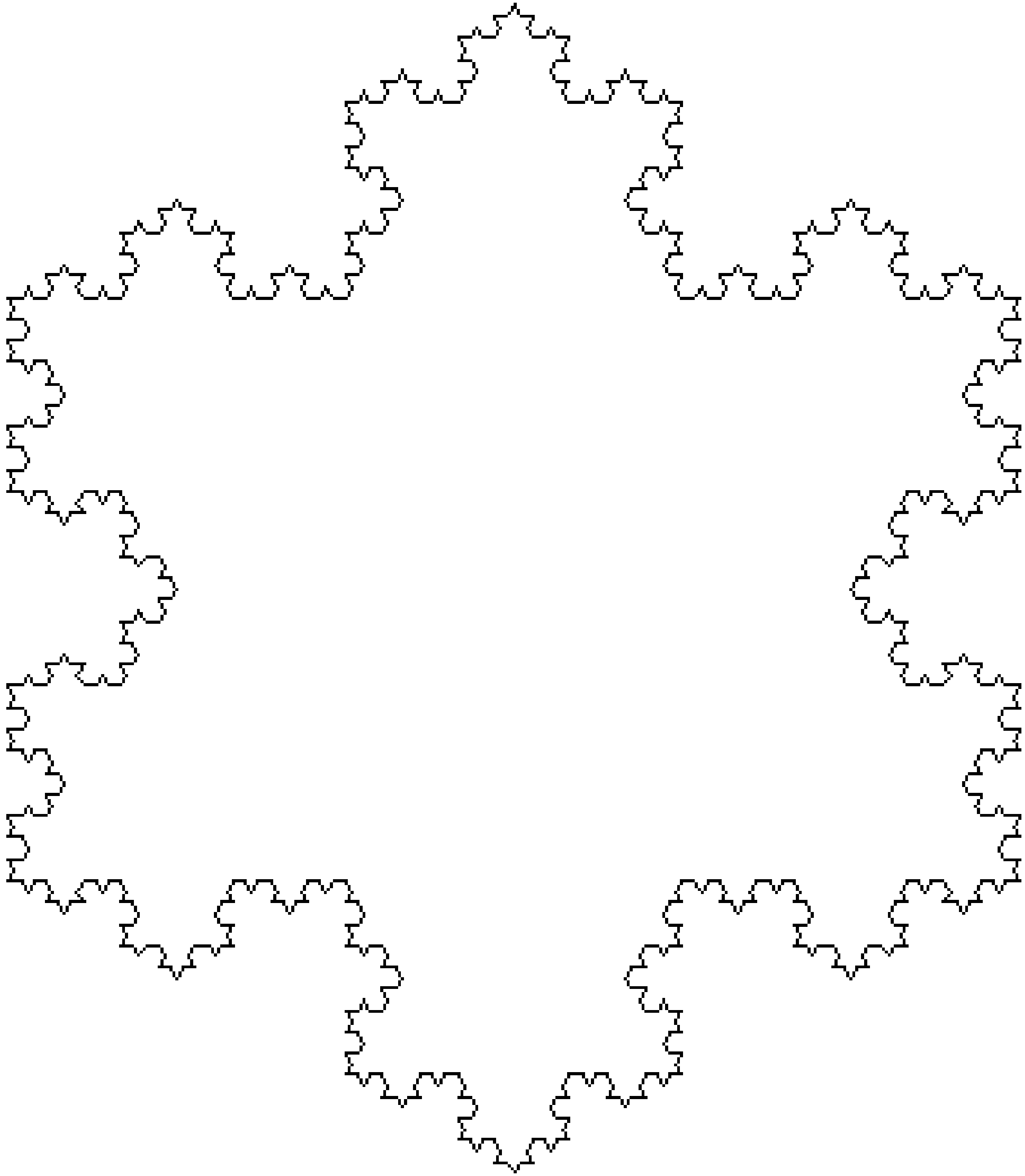
$$=A_1+3\cdot\frac{1}{9}\cdot A_1+3^2\cdot 4^1\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot A_1$$



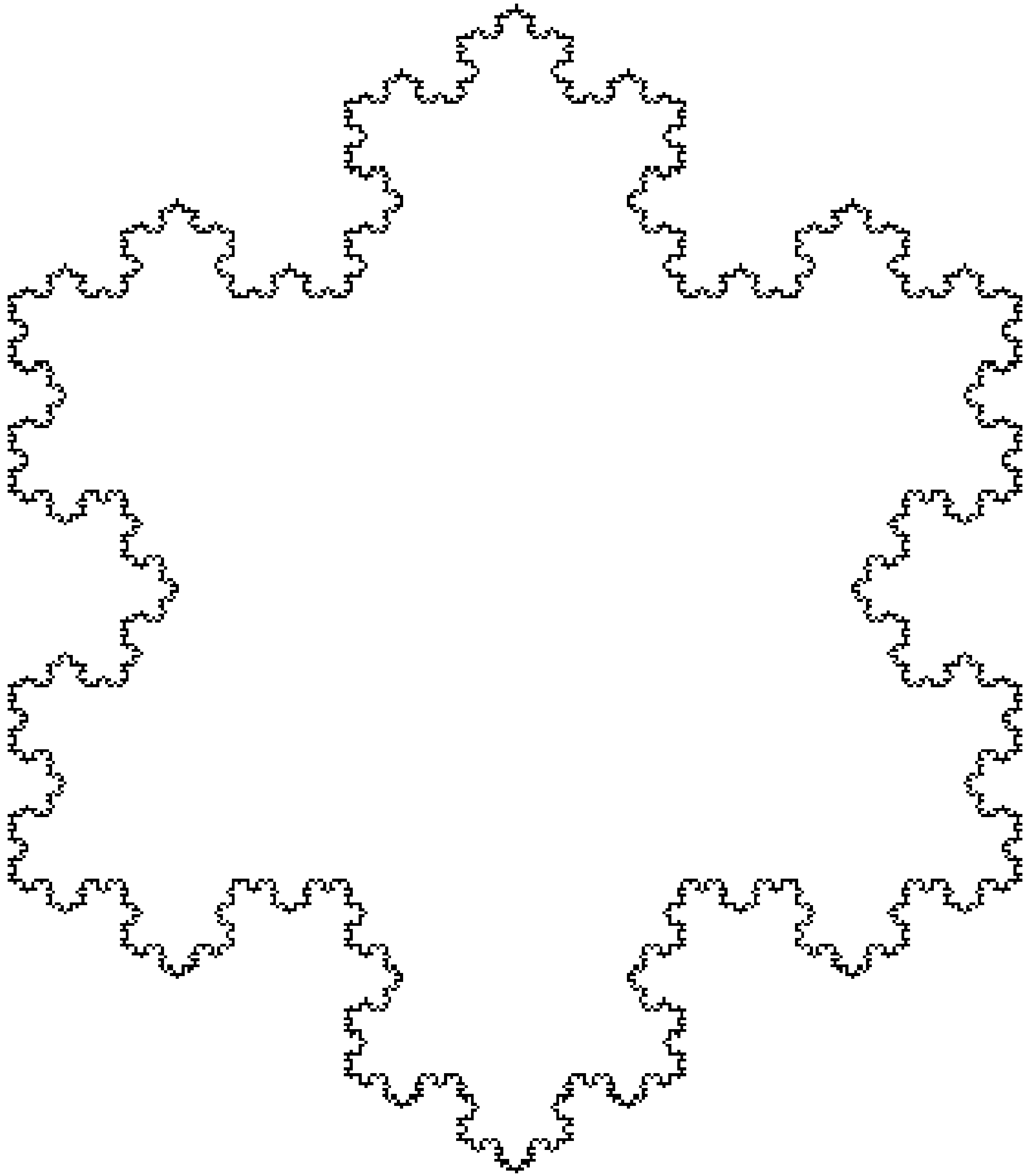


$$A_4 = A_1 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_1 + 3^2 \cdot 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A_1 + 3^3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot A_1$$

第4次分叉 周长为9.48 面积为0.683



第5次分叉 周长为12.6 面积为0.688



$$A_n = A_1 + 3\cdot\frac{1}{9}A_1 + 3\cdot4\cdot(\frac{1}{9})^2A_1 + \cdots + 3\cdot4^{n-2}\cdot(\frac{1}{9})^{n-1}A_1$$

$$= A_1\{1 + [\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(\frac{4}{9}) + \frac{1}{3}(\frac{4}{9})^2 + \cdots + \frac{1}{3}(\frac{4}{9})^{n-2}]\} \quad n = 2, 3, \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_1(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}) = \frac{8}{5}A_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

雪花的面积存在极限（收敛）.

结论：雪花的周长是无限的，而面积有限。

例2、讨论级数

$$\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$$ 的敛散性。

注意 此方法常用。

例3 、讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ $(a\neq 0)$的敛散性。

例4、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和。

解：$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}\to 1\,(n\to\infty)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=2 \quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$$

二、级数的基本性质

性质1 （级数收敛的必要条件）

$$\text{若级数}\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n\ \text{收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

证：令 $x_n = S_n - S_{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \underset{\substack{\Downarrow \\ S}}{\lim_{n\to\infty} S_n} - \underset{\substack{\Downarrow \\ S}}{\lim_{n\to\infty} S_{n-1}} = 0$$

$$\because\ \text{若级数}\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n\ \text{收敛},$$

推论 若级数一般项不趋于零 $\Rightarrow$ 级数发散。

例5、判定$-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n}\frac{n+1}{n+2}+\cdots$ 敛散性。

例6、判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ 敛散性。

例7、判定调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性。

解：$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ 但该级数是发散的。

$$\because S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

假设调和级数收敛，其和为 S .

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = s - s = 0$$

即 $0 \geq \frac{1}{2} \quad (n\to\infty)$ 矛盾 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

注意 重要的是结论。

性质2（线性性）

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 α

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛于 β

常数， k, l 为常数，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n + lb_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n + lb_n) = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n + l\sum_{n=1}^{\infty} b_n = k\alpha + l\beta$$

（用级数收敛的定义证）

注意：此性质表示了三个含义：

1) 收敛级数可以逐项相加减和逐项数乘运算；

例8、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right]$ 之和。

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 具有相同的敛散性，

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} lb_n$ 具有相同的敛散性；

3) i) 两个收敛级数的代数和仍为收敛级数，

ii) 一个收敛级数与一个发散级数逐项相加所组成的级数一定发散，

iii) 两个发散级数的代数和可能收敛可能发散。

性质3

在级数中去掉有限项、加上有限项或改变有限项的值，都不会改变级数的敛散性。但收敛时，级数的和一般将改变。

即：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

则级数 $\sum_{n=k+1}^{\infty} x_n$ 收敛，$(k \geq 1)$ 且其逆亦真。

性质4 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛，且其和不变。

注意： 性质4的逆命题不成立。

即：收敛级数去括号后所成级数不一定收敛。

例9、 级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 收敛于0 .

但去掉括号 $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$ 发散。

三、正项级数及审敛法

定义： 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的各项都是非负实数，

即 $x_n \geq 0 \quad n=1,2,\cdots$

则称此级数为正项级数。

* 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$

是单调增加的。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} x_k = S_{n+1} \quad n=1,2,\cdots$$

定理： 正项级数收敛

$\Leftrightarrow$ 它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

证： "$\Rightarrow$" 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 正项级数，即部分和数列 $\{S_n\}$

$S_1 \le S_2 \le \cdots \le S_n \le \cdots$ 单调升，

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛， $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ $\therefore \{S_n\}$ 有上界；

"$\Leftarrow$" 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 正项级数， $\therefore \{S_n\}$：

$S_1 \le S_2 \le \cdots \le S_n \le \cdots$ 单调升，

又 $\{S_n\}$ 有上界， $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$

由收敛定义得正项级数收敛。

1、比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两个正项级数，

若存在常数 $A>0$，使得 $x_n \le A y_n \quad n=1,2,\cdots$

则 1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛。

2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也发散。

注意：1) 比较判别法的条件可放宽为：

存在正整数 N，常数 $A>0$，

使得 $x_n \le A y_n \quad n>N$.

2) 比较判别法须有参考级数。

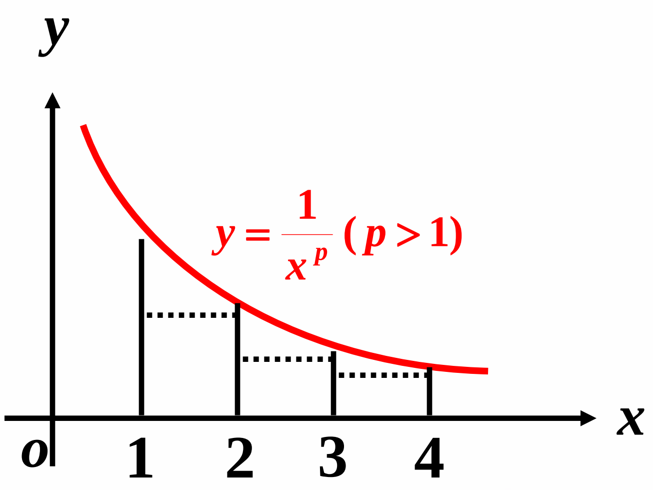
例10、讨论 p — 级数敛散性。

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad (p>0)$$

解：设 $0<p\le 1$，$\because \dfrac{1}{n^p}\ge\dfrac{1}{n}$

由比较判别法，p — 级数发散；

设 $p>1$，显然 $S_n<S_{2n+1}$，



$$S_{2n+1}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}+\frac{1}{(2n+1)^p}$$

$$=1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]+\left[\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^p}\right]$$

$$<1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]$$

$$=1+\frac{2}{2^p}\left[1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\right]$$

$$=1+2^{1-p}S_n<1+2^{1-p}S_{2n+1}\Rightarrow S_{2n+1}<\frac{1}{1-2^{1-p}},$$

$\therefore S_n<S_{2n+1}<\dfrac{1}{1-2^{1-p}}$ 有界，单调有界数列有上界，

$\therefore$ p — 级数收敛。

结论： p — 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

当 $p>1$ 时， p — 级数收敛；

当 $p\le 1$ 时， p — 级数发散。

重要参考级数：

几何级数， p-级数， 调和级数。

例11、讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$的敛散性。

例12、若级数$\sum a_n$收敛，证明$\sum\left|a_n a_{n+1}\right|$收敛。

例13、设 $0 < p < q \ (q > \dfrac{1}{\pi})$，

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^n \sin^{n+1} \dfrac{1}{q}$ 的敛散性。

例14、讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 的敛散性。

1′、比较判别法的极限形式

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两个正项级数，

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=l$， 那么

1) 当 $0<l<+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 有相同的敛散性；

2) 当 $l=0$ 时， 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散；

3) 当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散，

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛。

证明: 1) 对 $\varepsilon=\frac{l}{2}>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\varepsilon \quad \text{即} \quad \frac{l}{2}y_n<x_n<\frac{3l}{2}y_n,$$

由比较判别法，即证；

同理可证(2)、(3).

例15、判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ 的敛散性。

例16、 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性。

例17、 判别正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{n}}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 的敛散性。

2、*D'Alembert* 判别法(比值判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，$x_n \neq 0$，如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = r$，

则 1) 当 $r<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

2) 当 $r>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散，

3) 当 $r=1$ 时，无法判断。

优点： 不必找参考级数。

注意： 当 $r=1$ 时，级数可能收敛可能发散。

典型例子 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

例18、判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ 的敛散性。

例19、判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}$ 的敛散性。

例20、 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (x>0)$ 的敛散性。

***D'Alembert* 判别法适用：**

x_n 与 x_{n+1} 有相同因子的级数，

特别是 x_n 中含有因子 $n!$ 或指数函数的。

3、*Cauchy* 判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = r$，

则 1) 当 $r<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

2) 当 $r>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散，

3) 当 $r=1$ 时，无法判断。

Cauchy 判别法适用：

一般项中含有 n 的有理指数或无理指数。

例21、判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^3\left(\frac{5}{n}\right)^n$ 的敛散性。

例22、判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ $x>0$ 的敛散性。

4、积分判别法

定理： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，若非负函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减少，且 $x_n = f(n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 有相同的敛散性。

例23、判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 的敛散性。

例24、讨论 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q}$ $q>0$ 的敛散性。

四、*Leibniz* 级数

定义： 称形式为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \ \ (u_n > 0)$

的级数为 **交错项级数。**

Leibniz 定理

若交错项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \ \ (u_n > 0)$ 满足

1) $\{u_n\}$ 单调减少， 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则此交错项级数收敛，且

$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \le u_1$, 其余项 $|r_n| \le u_{n+1}$.

证：$\because u_{n-1} - u_n \geq 0$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq 0$$

$\{S_{2n}\}$ 单调增加，

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

$\{S_{2n}\}$ 有界，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = s \leq u_1$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{u_{2n+1}}) = s \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = s$$

则此交错项级数收敛，且收敛于$s \leq u_1$

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$

$\left|r_n\right| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 交错项级数 $\Rightarrow \left|r_n\right| \leq u_{n+1}$.

例25、判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 的敛散性。

例26、判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性。

五、绝对收敛与条件收敛

定义： 正项和负项任意出现的级数，称为**任意项级数。**

定理： 1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛；**

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，

则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **为条件收敛级数。**

例27、讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 的敛散性，

（若收敛，是绝对收敛还是条件收敛）.

例28、讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln^3 n}{n}$ 的敛散性。

例29、讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{na^n}$ $(a>0)$ 的敛散性，

（若收敛，是绝对收敛还是条件收敛）.

内容小结

1、利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2、利用正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发散

满足 ↓

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho < 1$ → 收敛

$\rho > 1$ → 发散

$\rho = 1$ → 不定

用它法判别：
- 比较审敛法
- 部分和极限
- 积分判别法

3、任意项级数审敛法

$$
\begin{cases}
\text{若}\ \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\ \text{收敛，}\quad \text{称}\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{绝对收敛；} \\
\text{若}\ \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\ \text{发散，}\quad \text{而}\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{为收敛级数；}
\end{cases}
$$

$$
\text{称}\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{条件收敛。}
$$

***Leibniz* 判别法：**

$$
\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{则交错级数} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\ \text{收敛。}
$$