# 第二篇  线性代数与空间解析几何

## 线性代数的主要课题：

线性代数源于对线性方程组求解方法和解的结论的讨论。

它以矩阵为工具研究线性空间之间各类线性变换性质的数学理论。

## 线性代数基本内容

行列式、矩阵、 $n$ 维向量、 线性方程组、

标准形与二次型。

基本理论基础

## 线性代数特点

以离散变量为研究对象，

抽象性、逻辑性和应用性强 。

# 第四章 矩阵和线性方程组

* 介绍行列式、矩阵的基本概念、性质和运算。
* 讨论线性方程组的解。

## §1 行列式

行列式产生于解线性方程组。从消元法解二元、三元线性方程组来引入二阶和三阶行列式，将其推广到 $n$ 阶行列式。进而介绍其的定义、性质和计算方法，最后给出解线性方程组的 *Cramer* 法则。

# 一、$n$ 阶行列式的定义

## 1、二阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

主对角线

次对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$

二阶行列式

## 2、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

三阶行列式

## 3、三阶行列式的结构

1）每项为三个元的乘积，所属不同的行、列，且仅出现一次。

每一项都可写成 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$

$i_1, i_2, i_3$ 是 1，2，3 的一个排列；

2） 每项都带有符号

3） 三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{?} (-1)^{t \, ?} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

当 $n > 3$ 时，行列式的代数形式呢？

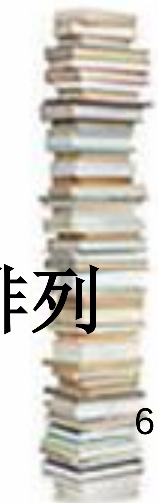
对角线法对四元一次方程组不成立！！！

## 4、逆序数的概念

一个数 $i$ 逆序：

即数字 $i$ 的前面比 $i$ 大的数字的个数。

逆序数：一个排列中，逆序的总和，称为此排列的逆序数。



例1、求排列 $135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$逆序数。

解：$135\cdots(2n-1)$ 不构成逆序；

2 前面有 $n$-1 个数比它大，故有 $n$-1 个逆序；

4 前面有 $n$-2 个数比它大，故有 $n$-2 个逆序；

依次下去，直到前面没有数比它大，故没有逆序；

将所有元素的逆序相加得逆序数：

$$1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$$

三阶行列式中正项的情况：

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}a_{22}a_{33}: & 123 & \tau'=0 \\ a_{12}a_{23}a_{31}: & 231 & \tau'=2 \\ a_{13}a_{21}a_{32}: & 312 & \tau'=2 \end{array}\right\}\text{均为偶数，}$$

行数已成自然排列123，$\therefore \tau=0$ 只需考虑列数的情况；

三阶行列式中负项的情况：

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}a_{23}a_{32}: & 132 & \tau'=1 \\ a_{12}a_{21}a_{33}: & 213 & \tau'=1 \\ a_{13}a_{22}a_{31}: & 321 & \tau'=3 \end{array}\right\}\text{均为奇数。}$$

直观地得到

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $\tau$ 为偶数时，该项符号为正；

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $\tau$ 为奇数时，该项符号为负。

## 5、$n$ 阶行列式的定义

把 $n^2$ 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,\cdots,n)$ 排列成一个有 $n$ 行、$n$ 列的记号：记为

$$\det(A)=\left|A\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称此为 $n$ 阶行列式，$a_{ij}$：第 $i$ 行第 $j$ 列上的数或元

$n$ 阶行列式是下列所有这些项的代数和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

## 说明：

1）每项为$n$个元的乘积，$n$个元素是从每一行中选出，且在不同列上，一般形式为

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

第一下标：按行 1, 2, …, $n$ 的顺序排列，

第一下标：$i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 1, 2, …, $n$ 的一个排列，

2）符号确定：

若 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $\tau$ 为偶数，$(-1)^{\tau}$为正，

若 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $\tau$ 为奇数，$(-1)^{\tau}$为负；

3）$n$ 阶行列式有 $n^2$ 个元，共有 $n!$ 项。

例2、$f(x)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & x & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -x & 0 & 0 \\ 3 & 2 & x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ 求 $x^5$ 的系数。

用定义计算一般的行列式十分繁杂不现实!

## 6、行列式的性质

**性质1** 行列式与其置换行列式相等

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $\left|A\right| = \left|A^{\mathrm{T}}\right|$

**说明:**

性质2　互换行列式的两行(或两)列，行列式仅改变符号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

说明：

**性质3** 行列式中某行(或某列)元素的公因子可提到行列式的外面。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**性质4** 行列式中任意两行(或两列)元素对应成比例,则该行列式的值为零。

**推论** 行列式中任意两行(或两列)元素相等,则该行列式的值为零。

# 性质5

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & \cdots & a_{in}+b_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

**性质6**　行列式某行(或列)的各元素乘上常数倍后加到另一行(或列)的对应元素上，此行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# 性质7　三角行列式等于其对角元素的乘积。

## 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n \qquad \begin{vmatrix} & & a_1 \\ & \unicode{x22F0} & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

余子式 划去 $|A|$ 中元素 $a_{ij}$ 所在的行及列，

得到$n$-1 阶子式（行列式）．记为 $\Delta_{ij}$

$$\Delta_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 $\Delta_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的余子式。

# 代数余子式

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ 称为 $a_{ij}$ 的代数余子式。

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n$ 阶行列式可定义为

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式。

如 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

## 性质8 （*Laplace* 展开定理）

$n$ 阶行列式可按第 $i$ 行展开

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots n)$$

$$(= a_{i1}(-1)^{i+1}\Delta_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}\Delta_{in})$$

或按第 $j$ 列展开

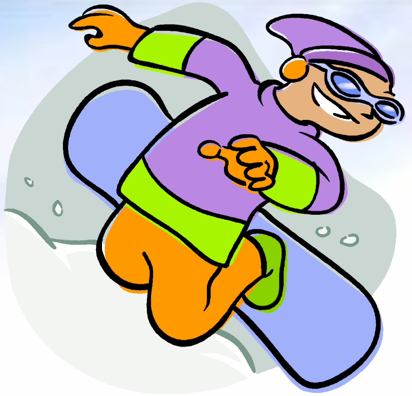
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots n)$$

$$(= a_{1j}(-1)^{1+j}\Delta_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}\Delta_{nj})$$

**推论** $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}$$

$$= \delta_{ij} \cdot |A| = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

## 二、行列式的计算



记号

1、$r_{ij}(c_{ij})$表示互换 $i$ , $j$ 两行（列），

或 $r_i \leftrightarrow r_j \ (c_i \leftrightarrow c_j)$

2、$kr_i \ (kc_j)$ 表示第 $i$ 行（列）提取公因子$k(k \neq 0)$

3、$kr_j + r_i \ (kc_j + c_i)$表示以数 $k$ 乘以第 $j$ 行（列）各元素加到第 $i$ 行（列）相应元素上去。

例3、计算

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

例4、计算

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

例5、计算 （两种方法）

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

例6、计算

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

练习　计算$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$

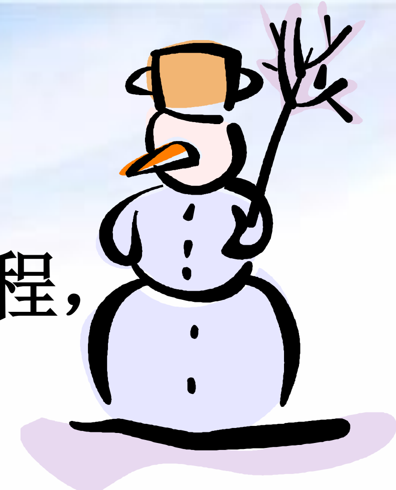
例7、证明 $n$ 阶范德蒙（*Vandermonde*）行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

例8、计算 $|A|=\begin{vmatrix} (x-1)^3 & (x-2)^3 & (x-3)^3 & (x-4)^3 \\ (x-1)^2 & (x-2)^2 & (x-3)^2 & (x-4)^2 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x-4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

例9、计算 $D_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & 0 & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ 0 & & & c & d & & & 0 \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & 0 & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n}$

## 三、克莱姆法则（*Cramer* 法则）



设含有 $n$ 个线性方程和 $n$ 个未知数的方程，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

如果线性方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{|B_1|}{|A|}\quad x_2=\frac{|B_2|}{|A|}\quad \cdots x_n=\frac{|B_n|}{|A|}\qquad (*')$$

其中 $|B_j|\,(j=1,\cdots,n)$ 是把系数行列式 $|A|$ 中 $j$ 列的元素用方程组右端的常数项替换后所得到的 $n$ 阶行列式。

$$|B_j|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 $j$ 列 $\quad (j=1,2,\cdots,n)$

证： 1）方程组 $(*)$ 有解（存在性），

即 $x_j = \dfrac{|B_j|}{|A|} \ (j = 1, \cdots, n)$ 是解；

2）$(*')$ 是唯一解（唯一性）.

说明：*Cramer* 法则适用的条件

1）方程组的方程个数与未知数个数必须相等

2）方程组的系数行列式不等于零

定理 *Cramer* 定理的逆否定理

如果线性方程组 $(*)$ 无解，或有两个不同的解，则它的系数行列式 $|A| = 0$.

定义：1）当 $b_1, \ldots, b_n$ 全为零时，

$$\text{即}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为齐次线性方程组。

2）当 $b_1, \ldots, b_n$ 不全为零时，

$$\text{即}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

称为非齐次线性方程组。

显然　$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

是齐次线性方程组的解，称为零解。

非齐次线性方程组的一组不全为零的解，称为非零解。

结论　齐次线性方程组一定有零解，

　　　但不一定有非零解。

## *Cramer* 法则的推论

如果齐次线性方程组的$|A| \neq 0$，则只有零解；

如果齐次线性方程组有非零解，则 $|A| = 0$；

如果齐次线性方程组的$|A| = 0$，则有非零解；

如果齐次线性方程组只有零解，则 $|A| \neq 0$.

例10、设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + \lambda x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 $\lambda$ 的值。

说明：*Cramer* 法则的意义

给出了解与系数的明确关系，但如果按这一法则解方程，计算量太大，所以一般不用其法则来求其解。为此，引出矩阵的概念及方法。