§3 定积分的计算

微积分基本定理（*Newton-Leibniz* 公式）

揭示了定积分与不定积分之间的关系：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

不定积分的常用方法（如：换元法、分部积分法、有理函数等）可直接适用于定积分的相应运算中。

一、换元积分法

定理 设 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数，φ 是定义在 α 和 β 间的连续可微函数，其值域包含于 $[a, b]$．且 $a=\varphi(\alpha)$， $b=\varphi(\beta)$.

则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta$

例1、求 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$

例2、求 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

例3、求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

例4、求 $\int_0^{a}\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx \quad a>0$

例5、设函数 $f(x)\in C_{[0,1]}$

1）证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

2）证明：$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

3）计算：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}dx$

二、分部积分法

Newton-Leibniz 公式和不定积分的分部积分法相结合，即可得定积分的分部积分法。

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

例6、求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$

例7、设 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

例8、求 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ n 为非负整数

解：$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

当$n \geq 2$ 时，则有

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x)$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

可得递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad n \geq 2$

$\therefore I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} I_{n-4}$ 以此类推得：

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{[n-(n-1)]}{[n-(n-2)]} I_0 & n = 2k \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{[n-(n-2)]}{[n-(n-3)]} I_1 & n = 2k+1 \end{cases}$$

$\because I_0 = \frac{\pi}{2} \quad I_1 = 1$

$$\therefore I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & n = 2k \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 & n = 2k+1 \end{cases}$$

例9、计算 $\int_0^1 x\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

例10、求 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

三、补充：定积分的二个性质

性质6 设 $a>0$，f 是 $[-a, a]$ 上的连续函数，

则：1）当 f 是奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2）当 f 是偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

证：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \overset{x=-t}{\underset{dx=-dt}{=\!=\!=}} \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)dt$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{奇} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx & \text{偶} \end{cases}$$

性质7 设 f 是以 T 为周期的连续函数，则对任何实数 a，都有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

证：
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$$

$$\Downarrow x = t + T$$

$$= \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(t)dt$$

$$= \int_0^T f(x)dx$$

例11、计算 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

例12、求 $\int_0^x \frac{3t}{t^2+t+1}dt$ 在[0, 1] 上的最值。

例13、设 $f(x) \in C_{[0,1]}$ 且满足 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} - \int_0^1 f(x)dx$

求 $f(x)$.

例14、设函数 $f(x)$、$g(x) \in C_{[a,b]}$.

证明：存在 $\xi \in (a,b)$,

使得 $f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx = g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$.

综合练习

1、计算 $\int_0^{\pi} x\sin^3 x dx$.

2、计算 $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}dx$.

3、计算 $\int_0^1 x[x^2]dx$.

4、设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$上的连续函数，

$$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$$ 证明：

1）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

2）若 $f(x)$ 为递减函数，则 $F(x)$ 是递增函数。