§2 条件概率与事件的独立性

一、条件概率

定义： 设 A 与 B 是试验 E 的样本空间 Ω 的两个事件，且 $P(A)>0$，则称在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率为条件概率，简称 B 对 A 的条件概率。记为

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

注意：

1）条件概率是一随机事件的概率，因此条件概率满足概率公理化定义中的三个条件，具有概率的一般的性质；

2）条件概率 $P(A/B)$ 与 $P(A)$ 的区别：

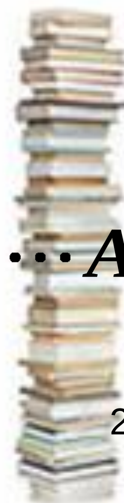
例1、市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂产品的合格率是 80%，若用 A、$\bar{A}$ 分别表示甲、乙两厂的产品，B 表示合格品。试写出有关事件的概率；并求从市场上买到一个灯泡是甲厂生产的合格灯泡的概率。

乘法公式 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，A，B，A_i（$i=1, 2, \cdots, n$）是 E 的事件（或 Ω 的子集），且 $P(A)>0$，$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

则有：1）$P(AB)=P(A)P(B/A)$

2）$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

注意：乘法公式与条件概率公式实际上是一个公式。



求在例1 中，从市场上买到一个灯泡是甲厂生产的合格灯泡的概率。

例2、10 个考签中有4 个难签，3 人参加抽签（不放回），甲先乙次，丙最后，求甲抽到难签；甲乙都抽到难签；甲没有抽到难签而乙抽到难签；甲乙丙都抽到难签的概率。

例3、人活到不同年龄段的死亡率如下：

年龄段	～10	～20	～30	～40	～50	～60	～70	～80	>80	合计
死亡率（%）	3.23	0.65	1.21	1.84	4.31	9.69	18.21	27.28	33.58	100.00

试求一个60岁的人在70岁死亡的概率。

二、全概率公式和逆概率公式

定义：设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是 E 的两两互不相容（互斥）事件，即 $A_iA_j = \phi$（$i \neq j$）且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$（即 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 中至少要发生一个，至多也只能发生一个），$P(A_i) > 0$ $i, j = 1, 2, \cdots, n$

则对任一事件 B（属于 E）有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$ 称为**全概率公式。**

注意：

1）全概率公式的作用在于，直接求一个较复杂的事件 B 的概率比较困难，但在附加条件 A_i 下， 求条件概率 $P(B/A_i)$ 却比较容易，所以说是一种“化整为零”的方法，化复杂为简单的方法。

2）如何转化，关键是寻找 $A_1, A_2, \cdots A_n$ ，使 $B = BA_1 \cup BA_2 \cup \cdots \cup BA_n$，再利用一次加法公式和一次乘法公式即可得到全概率公式。

3）寻找 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 可供参考的方法：

全概率公式中的条件可以等价地写成

“事件 B 能且仅能与 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 之一同时发生” 或

“把完备事件组 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 看成导致 B 发生的一组原因，而这些原因的概率是已知的或能求出的。”

例4、某地区统计，较胖体型者占 10% ，较瘦体型者占 8% ，中等体型者占 82%，又知较胖体型者患高血压的概率为 0.2，较瘦体型者患高血压的概率为 0.05，中等体型者患高血压的概率为 0.1．问该地区的居民患高血压的概率。

例5、某工厂有四条流水线，生产同一种产品，该四条流水线的产量分别占总产量的 15%、20%、30%、35%，又这四条流水线的次品率依次为 0.05、0.04、0.03、0.02，现从出厂产品中任取一件，问恰好取到次品的概率是多少？但该次品是哪一条流水线生产的标志已经脱落，问厂方应如何处理这件次品的经济责任才合理？

Bayes 公式（逆概公式）

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是 E 的两两互不相容（互斥）事件，即 $A_iA_j = \phi$ （ $i \neq j$ ）

且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ $P(A_i) > 0$ $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

则对任一事件 B （ $P(B) > 0$ ）有 Bayes 公式：

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)P(B / A_j)} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

例 4 中，如果已经知道一个居民患有高血压，问他是较胖体型的概率是多少？

例 5 中，厂方应如何处理这件次品的经济责任才合理？

注意：

1）在全概和逆概公式中的 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是导致试验结果的各种原因。

ⅰ）$P(A_i)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是各种原因的概率，称为**先验概率**，一般是由实际经验给出的，是已知的。

ⅱ）$P(A_i/B)$ 称为后验概率，它反映了试验之后各种原因 $A_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 发生的概率的新结果，是 $P(A_i)$ 的修正值。

2）凡是已知试验结果，要找某种原因发生的可能性，即已知信息，问信息来自何方的问题，可用Bayes（逆概）公式解决。

如，若 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是病人可能患的 n 种不同疾病，在诊断前，先检验与这些疾病有关的某些指标（如体温、血压、白血球、转氨酶含量等），若检查结果病人的某些指标偏离正常值了（即 B 发生了），从概率的角度考虑，若 $P(A_i/B)$ 大，则病人患 A_i 病的可能也较大。

但要用Bayes 公式计算出 $P(A_i/B)$，要把过去病史中得到的先验概率 $P(A_i)$值代入（医学上称 $P(A_i)$ 为 A_i 病人的发病率）。

例6、已知一人群中，男性占 60% 且其中的 5% 是色盲患者，女性占 40% 且其中的 0.25%是 色盲患者。现从人群中任意挑选一个人，问

1）此人是色盲患者的概率；

2）若已知此人是色盲患者，求此人是男性的概率。

例7、癌症的早期诊断、治疗是提高疗效的关键。近年来，甲胎蛋白免疫检测法（简称AFP法）被普遍应用于肝癌的普查和诊断。设 A ：肝癌患者；B ：AFP 检验反应为阳性；且已知 AFP 检验方法的真阳性率为 $P(B|A)=0.94$ ，假阳性率为 $P(B|\bar{A})=0.04$ ，在人群中肝癌的发病率一般只有 $P(A)=0.0004$；今有一人 AFP 检验结果为阳性，现问该人患肝癌的可能性有多少？

三、事件的独立性

如果成立 $P(B/A)=P(B)$，即事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率，则称事件A 与事件 B **相互独立**，且有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

事件的相互独立性可以推广到有限多个事件的情况：

设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是 n 个事件，

1）若对任意 $k\ (1\le k\le n)$ ，任意 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$

有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 相互独立。

2）若对任意 $1\le i_1<i_2\le n$ ，有 $P(A_{i_1}A_{i_2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 两两相互独立。

注意：

1）事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 相互独立一定两两独立，反之两两独立不一定相互独立。

2）事件的独立性常常不是根据定义来判断，而是根据实问题来判断。

3）事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 相互独立，则

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P(A_i)\right)$$

4）若事件 A 与事件 B 相互独立，则

A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

5）互不相容（互斥）、互逆（对立）、相互独立的区别。

例8、甲、乙、丙各自向同一目标射击一次，已知它们的命中率分别为 0.7，0.8 和 0.75，求目标被击中 2 次的概率。

例9、假定每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为0.004，混合100个人的血清，求此混合血清含有肝炎病毒的概率。

四、重复独立实验

定义： 做 n 次的重复试验 E，每次试验的结果相互独立，称为**重复独立试验**。

Bernoulli 试验： 重复试验 E 只有两个结果 A 和 $\bar{A}$，为一个 **Bernoulli 试验**。

Bernoulli 概型：

一次 Bernoulli 试验或独立重复地进行若干次Bernoulli 试验的概率模型。

***n* 重 Bernoulli 概型：**

n 次 Bernoulli 试验中，事件 A 发生的概率为 p，事件A 恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k)$，则

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\cdots,n$$

显然，n 次试验中所有互不相容的结果（A 发生0 次，1 次，2 次，… ，n 次）有 $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$

Bernoulli 概型中重要事件的概率：

1）n 次 Bernoulli 试验中 A 恰好发生（出现）k 次，

则 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

2）将 Bernoulli 试验独立重复进行下去，直到A首次出现为止。

记 ω_k ：“首次 A 出现在第 k 次试验”

则 $\omega_k = \bar{A}\bar{A}\cdots\bar{A}A$

$P(\omega_k) = (1-p)\cdots(1-p)\cdot p = (1-p)^{k-1} p \quad k = 1, 2, \cdots$

称为**几何分布**。

例10、节能灯使用寿命在6000 h 以上的0.8 ，求5 个节能灯在使用6000 h 后，最多只有一个坏了的概率。

例11、对某种药物的疗效进行研究，假定这药物对某种疾病的治愈率 $p = 0.8$ ，有10 个患此病的病人同时服用这种药，求其中至少 6 个病人治愈的概率。

例12、某场比赛进行五局，并以五局三胜决定胜负。若已知甲方在每一局中的胜率为0.6，问甲方在比赛中获胜的概率是多少？若采用三局两胜制，或九局五胜制，问甲方在比赛中获胜的概率是多少？你从此计算中会得出什么结论？

例13、某人进行射击，每次中靶的概率为 p ，设各次射击中靶与否彼此独立，用 ξ 表示首次中靶时射击的次数，试求 $P(\xi=n)$