§7 极值

一、问题的提出

实例：某商店卖两种牌子的果汁，本地牌子每瓶进价2 元，外地牌子每瓶进价 2.4 元，店主估计，如果本地牌子的每瓶卖 x 元，外地牌子的每瓶卖 y 元，则每天可卖出 $70 - 5x + 4y$ 瓶本地牌子的果汁，$80 + 6x - 7y$ 瓶外地牌子的果汁,问：店主每天以什么价格卖两种牌子的果汁可取得最大收益？

每天的收益为

$$f(x,y)=(x-2)(70-5x+4y)+(y-2.4)(80+6x-7y)$$

二、多元函数的无条件极值

二元函数极值的定义：

设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad (or\ f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$$

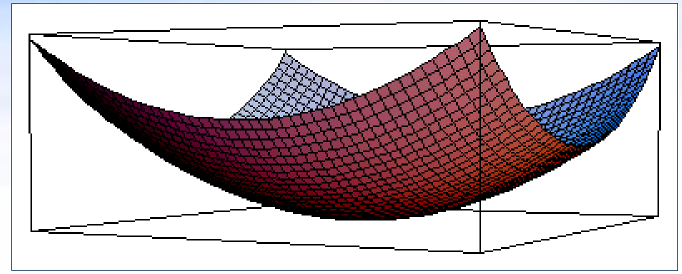
称 (x_0, y_0) 为函数 f 的一个极大值点(或极小值点).

称 $f(x_0, y_0)$ 为相应的极大值 (或极小值).

例如：

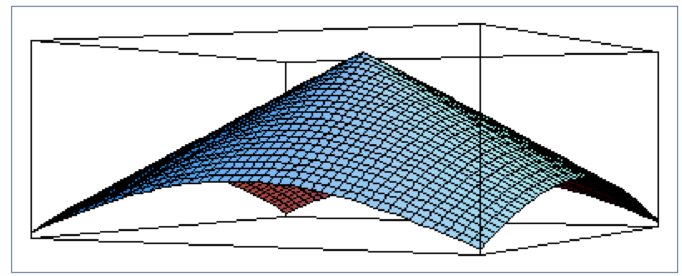
$$z = 3x^2 + 4y^2$$

在点(0, 0)有极小值；



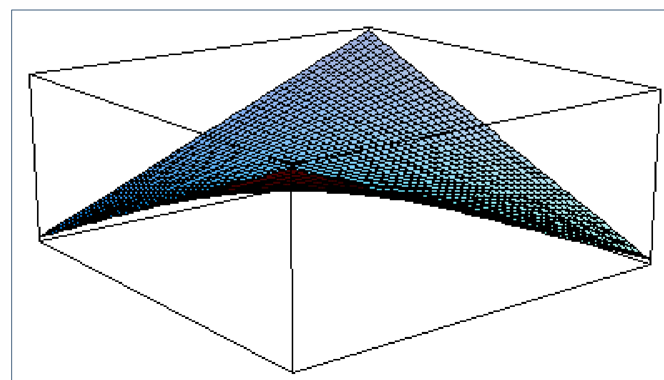
$$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

在点(0, 0)有极大值；



$$z = xy$$

在点 (0, 0) 无极值。



定理1 (极值的必要条件)

设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值，且 f 在在点 (x_0, y_0) 处的一阶偏导数存在，

则必有 $f_x'(x_0, y_0) = 0$， $f_y'(x_0, y_0) = 0$，

这样的点 (x_0, y_0) 称为驻点。

说明： 1) 使偏导数都为 0 的点称为驻点；

2) 偏导数存在的前提下，极值点必是驻点，

但驻点不一定是极值点；

如： $z = xy$ 在点 $(0, 0)$ 是驻点，但不是极值点。

3) 偏导数不存在的点也可能是极值点。

如： $z = f(x, y) = |x|$

在Oxy 平面整个 y 轴上的每一点 $(0, y)$ 都是 f 的极小值点，但在这些点上 f 关于 x 的偏导数均不存在。

定理2 (极值的充分条件)

设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数，且 $f_x'(x_0,y_0)=0$, $f_y'(x_0,y_0)=0$,

令 $A=f_{xx}''(x_0,y_0)$， $B=f_{xy}''(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}''(x_0,y_0)$.

则： 1) 当 $AC-B^2>0$ 时，

设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 具有极值：

$A>0$ 时， $f(x_0,y_0)$ 为极小值，

$A<0$ 时， $f(x_0,y_0)$ 为极大值；

2) 当 $AC-B^2<0$ 时， $f(x,y)$ 没有极值；

3) 当 $AC-B^2=0$ 时，不能确定，需另行讨论。

求函数 $f(x, y)$ 极值的步骤:

1) 在其定义域范围内求出驻点、偏导数及不存在的点;

2) 对于驻点，求出相应点的 A、B、C 用极值的充分条件来判定;

3) 对于偏导数不存在的点，或 $AC-B^2=0$ 的点，用极值定义判别。

例1、求函数 $f(x, y) = xy(a - x - y)$，$a \neq 0$的极值。

例2、求函数 $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值。

例3、讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$

在点 (0, 0) 是否取得极值。

三、多元函数的最值

函数 f 在闭域上连续

$$\Downarrow$$

函数 f 在闭域上可达到最值

最值可能点 $\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{边界上的所有点}\end{cases}$

比较其大小，最大为最大值、最小为最小值。

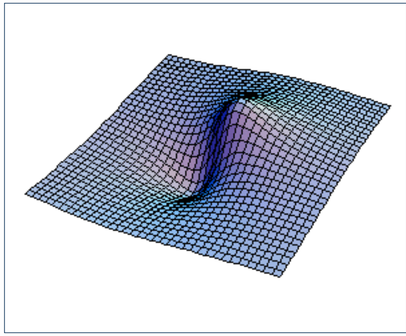
特别当区域内部最值存在，且只有一个极值点 P 时，

$f(P)$ 为极小(大)值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小(大)值

例4、求函数 $f(x,y)=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在区域

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,\ x>0,\ y>0\right\}$$ 内的最大值。

例5、求 $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$ 最值。



例6、求 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的极值和最值。

四、条件极值

实例、小李有200元钱,他决定用来购买两种物品DVD光盘和 CD 光盘。设他购买 x 张 DVD 光盘、y 张 CD 光盘达到最佳效果，效果函数为：

$$U(x, y) = \ln x + \ln y$$

设每张 DVD 光盘 8 元，每张 CD 光盘 4 元。问他如何分配这 200 元以达到最佳效果？

问题的实质：

求 $U(x, y) = \ln x + \ln y$ 在条件

$8x + 4y = 200$ 下的极值点。

极值问题 $\begin{cases} \text{无条件极值：对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值：对自变量除定义域限制外还有其它条件限制} \end{cases}$

1、定义 对自变量有一定限制的条件下，求某个多元函数的极值

约束条件 $G(x_1,\cdots,x_n)=0$

目标函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$

称为 条件极值

条件极值问题 $\begin{cases} \min F(x_1,\cdots,x_n) \ \ or \ \ \max F \\ G(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$

2、条件极值及其求法

$$g(x,y)=0$$

方法1 代入法

求函数 $z=f(x,y)$ 的极值在条件 $g(x,y)=0$ 下，

从条件 $g(x,y)=0$ 中解出 $y=\varphi(x)$

$$\Downarrow \text{转化}$$

求目标函数 $z=f(x,\varphi(x))$ 的无条件极值问题

$$\frac{dz}{dx}=f_x'+f_y'\frac{dy}{dx}=f_x'+f_y'\varphi'(x)=0$$

求函数 $u=F(x,y,z)$ 的极值:

在条件 $G(x,y,z)=0$ 下,

从条件 $G(x,y,z)=0$ 中解出隐函数 $z=g(x,y)$

$$\Big\Downarrow \text{转化}$$

求目标函数 $u=F(x,y,g(x,y))$ 的无条件极值问题

$$\begin{cases} u'_x = F'_x + F'_z \cdot z'_x = F'_x + F'_z \cdot \left(-\dfrac{G'_x}{G'_z}\right) = 0 \\ u'_y = F'_y + F'_z \cdot z'_y = F'_y + F'_z \cdot \left(-\dfrac{G'_y}{G'_z}\right) = 0 \end{cases}$$

方法2 *Lagrange* 乘数法

求函数$u=F(x,y,z)$，在条件$G(x,y,z)=0$ 下的

$$z=f(x,y) \qquad\qquad g(x,y)=0$$

极值，作*Lagrange* 函数：

$$L(x,y,z,\lambda)=F(x,y,z)+\lambda G(x,y,z)$$

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

化为 $L(x,y,z,\lambda)$的无条件极值，

$$L(x,y,\lambda)$$

即解方程组 $\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_z=0 \\ L'_\lambda=0 \end{cases}$ $\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_\lambda=0 \end{cases}$ 求极值。

3、函数的最值问题

第一步：找目标函数，确定定义域及约束条件；

第二步：判别，

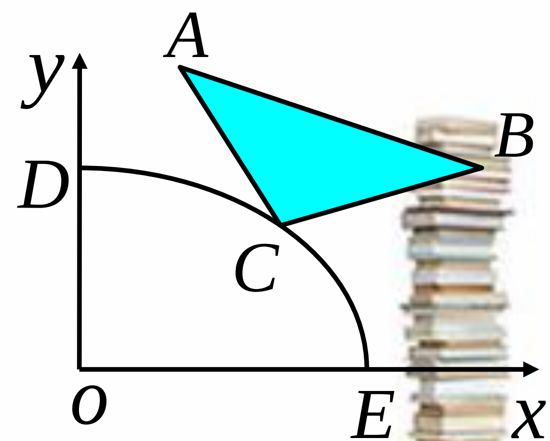
- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

例7、求原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 上点的最短距离。

例8、已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$,

试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x\geq 0, y\geq 0)$ 的圆周上

求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大。



综合练习

1、已知 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$，

证明：当 $f(x,y)$ 限制在每条过原点的直线上取值时，$f(0,0)$ 是极小值。

2、求椭圆 $x^2+y^2=1$ 上一点，使其到直线 $2x+3y=6$ 的距离最短。

3、求函数 $f(x,y)=2x^2+6xy+y^2=1$ 在椭圆域 $x^2+2y^2\le 3$ 上最大和最小值。