答案与提示

第八章 多元函数积分学

§1 重积分的概念及其性质

1．$\frac{2}{3}\pi r^3$。

2．略。

3．$\iiint\limits_D \sin^2(x+2y+3z)d\sigma < \iiint\limits_D (x+2y+3z)^2 d\sigma$。

4．（1）$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2 \le I \le \frac{1}{2}\pi^2$；

（2）$\frac{8}{\ln 2} \le I \le \frac{16}{\ln 2}$；

（3）$\frac{\pi}{4} \le I \le \frac{\pi}{4}e^{\frac{1}{4}}$。

5．$\frac{4\pi}{3}f(a,b,c)$。

§2 二重积分的计算

1．（1）$\frac{e}{2}-1$；（2）$\ln 2$；（3）$\frac{32}{21}$；（4）$\frac{4}{5}$；（5）-2；（6）$\frac{\pi}{2}$。

2．（1）$\int_0^{\ln 2}dy\int_{e^y}^{2}f(x,y)dx$；（2）$\int_0^1 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{1}f(x,y)dy$；

（3）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy$；（4）$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{2-x^2}f(x,y)dy$；

3．$\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{6}$。

4．$\frac{88}{105}$。

5．$\frac{1}{24}(b^2-a^2)$。

6．$\frac{28}{3}\ln 3$。

7．（1）$-6\pi^2$；（2）$\frac{45}{2}\pi$；（3）$\frac{2\pi}{15}+\frac{512}{75}-\frac{98\sqrt{3}}{25}$；（4）$\frac{\pi}{2}$。

8．$\dfrac{ab\pi}{2}$。

9．$\dfrac{a^2b^2}{4c^2}$。

10．提示：交换积分次序。

11．提示：注意 $\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} \dfrac{1}{f(y)}dxdy = \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} \dfrac{1}{f(x)}dxdy$。

12．提示：注意 $\iint\limits_{D}\left[\sin(x^2)+\cos(y^2)\right]dxdy = \iint\limits_{D}\left[\sin(x^2)+\cos(x^2)\right]dxdy$。

13．提示：对二重积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy$ 作变量代换 $u=x+y$，$v=x-y$。

§3 三重积分的计算及其应用

1．（1）$\dfrac{1}{364}$；（2）$\dfrac{1}{80}$；（3）$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$；（4）0。

2．（1）$\pi^3-4\pi$；（2）$\left(\dfrac{1}{3}H^3+R^2H\right)\pi$；（3）$\left(0,0,\dfrac{2}{3}\right)$。

3．（1）$\dfrac{324}{5}\pi$；（2）0；（3）$\dfrac{2}{5}\pi$。

4．（1）$\dfrac{1}{16}(e^{16}-e)$；（2）$\left(\ln 2-\dfrac{(\ln 2)^2}{4}-\dfrac{1}{2}\right)\pi$；（3）0；（4）$\dfrac{\pi}{10}$。

5．取球心为原点，半球底面所在平面为 Oxy 平面，z 轴铅直向上，则重心为 $\left(0,0,\dfrac{8}{15}a\right)$。

6．提示：$I_x=\dfrac{1}{2}\pi HR^4\rho+\dfrac{2}{3}\pi H^3R^2\rho$，$I_z=\pi HR^4\rho$，其中 ρ 是密度。

7．（1）$\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$；（2）$\dfrac{3}{10}M$；（3）$\dfrac{11}{20}M$；（4）$\left(0,0,6\left(1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)GmM\right)$。

§4 反常重积分

1．（1）$p<1$ 收敛，$p\ge 1$ 发散；（2）$p<\dfrac{3}{2}$ 收敛，$p\ge\dfrac{3}{2}$ 发散。

2．（1）$\dfrac{1}{(q-1)(p-q)}$；（2）$\dfrac{ab\pi}{e}$；（3）$\pi^{\frac{3}{2}}$。

3．收敛，且 $I=\pi^2$。

4．提示：注意 $\iint\limits_{0\le y\le x\le a}\dfrac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\int_0^a dy\int_y^a\dfrac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx$，再利用

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}=\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+c$$（作变换 $x-\dfrac{a+b}{2}=t$ 计算）。

§5 两类曲线积分

1．（1）5；（2）$\sqrt{3}$。

2．（1）$2\pi R^{2n+1}$；（2）$2a^2$；（3）$2\pi a$；（4）$a^{\frac{7}{3}}$；（5）$\dfrac{16\sqrt{2}}{143}$；（6）$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$。

3．$\dfrac{56}{3}$。

4．$\left(\dfrac{4a}{3},\dfrac{4a}{3}\right)$。

5．（1）$-\dfrac{4}{3}ab^2$；（2）$\dfrac{22}{21}$；（3）$\dfrac{1}{35}$；（4）-2π；（5）$\dfrac{1}{3}k^3\pi^3-a^2\pi$；（6）$\dfrac{1}{2}$。

6．$\dfrac{1}{2}k(a^2-b^2)$（k 为比例系数）。

7．$-k\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}\ln 2$（$k$ 为比例系数）。

8．$\displaystyle\int_L\frac{P+2tQ+3t^2R}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}ds$。

§6 第一类曲面积分

1．（1）$\dfrac{2\pi[(1+a^4)^{\frac{3}{2}}-1]}{3a^2}$；（2）$\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)a^2$；（3）$4\pi^2ab$。

2．（1）$2\pi R\ln\dfrac{R}{h}$；（2）$-\pi R^3$；（3）$\dfrac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$；

（4）$\dfrac{64\sqrt{2}}{15}a^4$；（5）$2\pi\arctan\dfrac{H}{a}$；（6）0。

3．$\dfrac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$。

4．$\left(0,0,\dfrac{a}{2}\right)$。

5．$\dfrac{3\pi}{2}+\sqrt{2}\pi$。

§7 第二类曲面积分

1．（1）$\iint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{3}{5}P(x,y,z)+\dfrac{2}{5}Q(x,y,z)+\dfrac{2\sqrt{3}}{5}R(x,y,z)\right)dS$；

（2）$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{2xP(x,y,z)+2yQ(x,y,z)+R(x,y,z)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$。

2．（1）3；（2）0；（3）$2\pi e^2$；（4）$\dfrac{abc^2}{4}\pi$。

3．（1）$\dfrac{11}{6}-\dfrac{5}{3}e$；（2）$128\pi$；（3）0；（4）$\dfrac{\pi^3}{6}$。

4．$\dfrac{3\pi}{16}$。

5．πh^3。

§8 **Green 公式与 Stokes 公式**

1．（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）0；（3）$\dfrac{3}{10}$；（4）$\dfrac{1}{5}\left(1-e^{\pi}\right)$。

2．（1）$\dfrac{1}{6}a^2$；（2）$3\pi a^2$。

3．（1）$-\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{2}\sin 1\cos 1$；（2）$\dfrac{2}{3}\pi^3-3(\pi-1)e^{\pi}-\sin 2+2\cos 2-3$。

4．（1）$-\sqrt{3}\pi a^2$；（2）0；（3）$-2\pi a(a+b)$；（4）$-\dfrac{9}{2}$。

5．提示：利用 Green 公式可得

$$\oint_C xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy。$$

注意$\iint\limits_D f(y)dxdy=\iint\limits_D f(x)dxdy$便有

$$\oint_C xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\geq 2\iint_D dxdy。$$

6．提示：利用 Green 公式可得 $\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\iint_D f(xy)dxdy$，再对二重积分作变量代换 $u=xy$，$v=\frac{y}{x}$。

§9 旋度与无旋场

1．（1）$(3xz+3x, 3x^2-3yz, -3z-2)$；（2）$(x^2-2zx, y^2-2xy, z^2-2yz)$；

（3）$(0, 0, 0)$。

2．12π。

3．（1）π；（2）0。

4．（1）势函数：$\sin(xy)-\cos z+c$；

（2）势函数：$y^2\cos x+x^2\cos y+c$。

5．（1）原函数：x^2y+c；

（2）原函数：$x^3y+4x^2y^2+12ye^y-12e^y+c$。

6．（1）$\frac{175}{2}$；（2）48；（3）$6+\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

§10 Gauss 公式和散度

1．（1）$\frac{384}{5}\pi$；（2）$-\frac{\pi}{2}$；（3）$-\frac{2\pi}{5}a^3b^3c^3$；（4）-32π；（5）$\frac{194}{5}\pi$；（6）$\frac{4\pi}{3}$。

2．（1）4；（2）36。

3．提示：

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\boldsymbol{G}&=-Y_z'\boldsymbol{i}+X_z'\boldsymbol{j}+\left(Y_x'-X_y'\right)\boldsymbol{k}\\&=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+\left[-\int_{z_0}^{z}P_x'(x,y,\xi)d\xi-\int_{z_0}^{z}Q_y'(x,y,\xi)d\xi+R(x,y,z_0)\right]\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{F}$ 是无源场，所以 $P_x'+Q_y'+R_z'=0$，于是

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\boldsymbol{G}&=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+\left[\int_{z_0}^{z}R_z'(x,y,\xi)d\xi+R(x,y,z_0)\right]\boldsymbol{k}\\&=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{F}.\end{aligned}$$

4．$4abc\pi$。

5．提示：用反证法。若在某点M处有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=K\neq 0$，不妨设$K>0$，

则有M的某个邻域$O(M,r)$，在其上成立$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}>\dfrac{K}{2}>0$。于是由 Gauss

公式得

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial O(M,r)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{O(M,r)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\\&>\iiint_{O(M,r)}\frac{K}{2}dxdydz=\frac{2K}{3}\pi r^3>0.\end{aligned}$$

与已知矛盾。

6．提示：按定义直接计算。

7．提示：按定义直接计算。