答案与提示

第五章 线性变换、特征值和二次型

§1 线性空间

1．（1）是；（2）是；（3）是；（4）$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$时是线性子空间，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时不是。

2．（1）是；（2）$a=0$时是线性空间，$a\neq 0$时不是；（3）是。

3．略。

4．维数：1。基：$(1,1,1)^T$。

5．提示：参见例 5. 1. 8。

6．

（1）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & -1 & -4\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix}1/3\\ 1/3\\ 0\end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$。

7．$\tilde{\varepsilon}_1=(4,0,-5)^T$，$\tilde{\varepsilon}_2=(-3,0,4)^T$。

若 $\boldsymbol{x}\in S$ 在基{ $\boldsymbol{\varepsilon}_1$， $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ }下的坐标为$(\alpha_1,\alpha_2)^T$，在基{ $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$，$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ }下的坐标为$(\beta_1,\beta_2)^T$，则

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1-2\alpha_2\\ \alpha_1-3\alpha_2\end{pmatrix}。$$

8．（1）提示：按定义验证；

（2）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$。

§2 线性变换及其矩阵表示

1．（1）是，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$；（2）不是；（3）是，$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

2．$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$。

3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。

4.（1）提示：直接验证；（2）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

5．略。

6. 提示：必要性：若 $\mathcal{A}$ 为可逆变换，则 $\lambda_1 \mathcal{A}\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \mathcal{A}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathcal{A}\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow$ $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$，因此 $\{\mathcal{A}\boldsymbol{a}_1, \mathcal{A}\boldsymbol{a}_2, \ldots, \mathcal{A}\boldsymbol{a}_k\}$线性无关。

充分性：若 $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k \subset U$，使得 $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，则 $\lambda_1 \mathcal{A}\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \mathcal{A}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathcal{A}\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$，即 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。$\Rightarrow \mathcal{A}$ 为单射。注意 $\mathcal{A}$ 也为满射$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ 为可逆变换。

§3 特征值问题

1.（1）$\lambda_1 = 2$，$\xi_1 = (0,0,1)^T$；$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，$\xi_2 = (-1,-2,1)^T$；

（2）$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$，$\xi_1 = (1,0,0,0)^T$；

（3）$\lambda_1 = 1$，$\xi_1 = (-3,1,-3)^T$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$，$\xi_2 = (2,1,0)^T$，$\xi_3 = (2,0,1)^T$；

（4）$\lambda_1 = 1$，$\xi_1 = (1,1,1)^T$，$\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\xi_2 = \left(1, \frac{11+5\sqrt{3}\mathrm{i}}{14}, \frac{15+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{14}\right)^T$，

$\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\xi_3 = \left(1, \frac{11-5\sqrt{3}\mathrm{i}}{14}, \frac{15-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{14}\right)^T$；

2. 提示：因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}| \neq 0$以及$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{O}$。

3．$|\boldsymbol{B}| = -288$，$|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}| = -72$。

4．（1）可逆；（2）可逆。

5．1 或 -2。

6． $-(2n-3)!!$。

7．（1） $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}_2-2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3$；（2） $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$。

8． $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}4^n & -2^n+4^n & 2^n+4^n\\0 & 4^n & 0\\0 & 2^n-4^n & 2^n\end{pmatrix}$。

9． $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-5$， $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-5$。

10． $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}_{3\times3}$。

11．提示：用反证法。若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathbf{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{P}^{-1}$，则

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\mathbf{diag}({\lambda_1}^k,{\lambda_2}^k,\cdots,{\lambda_n}^k)\boldsymbol{P}^{-1}。$$

因此 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 可以推出 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，与题设矛盾。

§4 内积和正交变换

1．（1） $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=5$， $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{6}$；（2） $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$， $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{3}$；

（3） $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=1-\mathrm{i}$， $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{10}$。

2．（1） $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$；（2） $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\2\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$。

3．（1）$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$。

4．提示：作 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 的内积。

5．

（1）$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{38}}{19}\\ \frac{\sqrt{38}}{19}\\ -\frac{3\sqrt{38}}{38}\\ -\frac{3\sqrt{38}}{38}\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{38}}{19}\\ \frac{\sqrt{38}}{19}\\ -\frac{3\sqrt{38}}{38}\\ -\frac{3\sqrt{38}}{38}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{6\sqrt{95}}{95}\\ \frac{3\sqrt{95}}{95}\\ \frac{\sqrt{95}}{19}\\ \frac{\sqrt{95}}{19}\end{pmatrix}$。

注：答案不唯一。

6．略。

7．提示：若 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的线性组合，那么显然对任何与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 均正交的向量 $\boldsymbol{x}$，恒有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=0$。

反之，不妨设 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\}$ 是 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$ 的极大线性无关组，则由上题可知，存在 $n-r$ 个线性无关的向量 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_{n-r}$，它们均与 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\}$ 正交，这样 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\ \boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_{n-r}\}$ 便构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，因此

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots\lambda_r\boldsymbol{a}_r+\lambda_{r+1}\boldsymbol{c}_1+\cdots\lambda_n\boldsymbol{c}_{n-r}$$

对该式取与 $\boldsymbol{c}_j$（$j=1,2,\cdots,n-r$）的内积便得 $\lambda_i=0$（$i=r+1,,\cdots,n$），因此 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 的线性组合。

8．略。

9．提示：直接验证。

10．略。

11．$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$c=0$。

12．（1）是酉矩阵；（2）是酉矩阵；（3）是正交矩阵；（4）不是正交矩阵，也不是酉矩阵。

13．提示：若$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$线性相关，则有不全为零的常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},$$

对该式取与$\boldsymbol{a}_j$（$j=1,2,\cdots,m$）的内积便得一个关于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$的齐次线性方程组，它有非零解，因此其系数矩阵的行列式$G[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m]=0$。

反之，若$G[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m]=0$，则其$m$个行向量线性相关。因此有不全为零的常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$使得$(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots\lambda_m\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_j)=0$（$j=1,2,\cdots,m$），于是

$$(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots\lambda_m\boldsymbol{a}_m,\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots\lambda_m\boldsymbol{a}_m)=0$$

即$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$。因此$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$线性相关。

14．提示：记$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$，则$\det(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=G[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m]$，再利用上题结论便可。

15．提示：证明方程组$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解。

§5 正交相似和酉相似

1．记$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathbf{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda}$。

（1）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}25&0\\0&0\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}-\frac{3\sqrt{35}}{35}&\frac{\sqrt{10}}{10}&-\frac{3\sqrt{14}}{14}\\\frac{\sqrt{35}}{7}&0&-\frac{\sqrt{14}}{7}\\\frac{\sqrt{35}}{35}&\frac{3\sqrt{10}}{10}&\frac{\sqrt{14}}{14}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；

（4）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

2．记$\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{AU}=\mathbf{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda}$

（1）$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ -\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} & \frac{3}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \\ \frac{(1+\sqrt{10})\mathrm{i}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} & \frac{(1-\sqrt{10})\mathrm{i}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 3+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{10} \end{pmatrix}$。

3．

（1）$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14 & -14 & -2 \\ -14 & 5 & -16 \\ -2 & -16 & -1 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

注：答案不唯一。

4．提示：不妨设$\boldsymbol{A}$是n阶上三角矩阵。记$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & a_{nn} \end{pmatrix}$，其中$\boldsymbol{A}_1$是$n-1$阶上三角矩阵，$\boldsymbol{b}$是$n-1$维列向量，$\boldsymbol{0}$是$n-1$维零向量（列向量）。因为$\boldsymbol{A}$为正交矩阵。所以$a_{nn}\neq 0$，且

$$\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{AA}^T=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^T & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b}^T & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{AA}^T+\boldsymbol{bb}^T & a_{nn}\boldsymbol{b} \\ a_{nn}\boldsymbol{b}^T & a_{nn}^2 \end{pmatrix},$$

于是$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^T & a_{nn} \end{pmatrix}$，且$A_1$是$n-1$阶上三角矩阵，也是正交矩阵。用

归纳法便可证明结论。

5．提示：直接验证。

6．（1）$(1,0,1)^T$；

（2）$\begin{pmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$。

注：解不唯一。

§6 二次型及其标准形式

1．作变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Sy}$

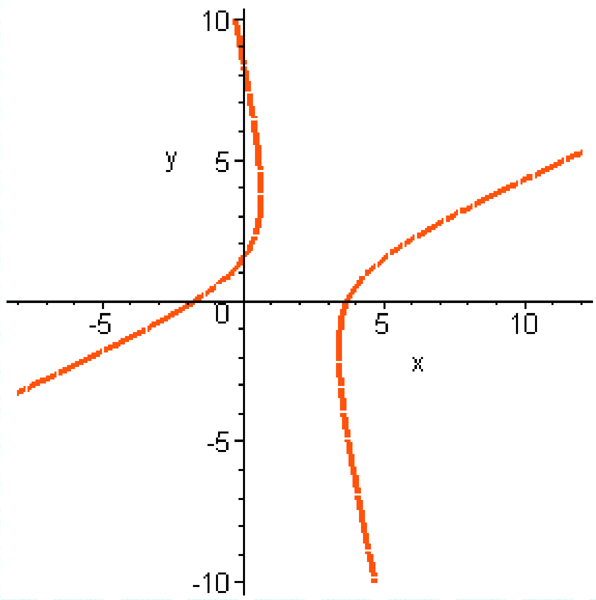
（1）$f=5y_2^2$，$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$。

（2）$f=\sqrt{2}y_1^2-\sqrt{2}y_2^2$，$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$。

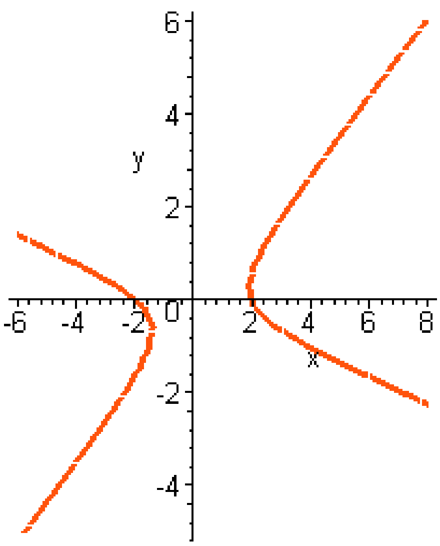
（3）$f=-y_1^2-y_2^2+8y_3^2$，$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$。

2．　注意标准型不唯一。

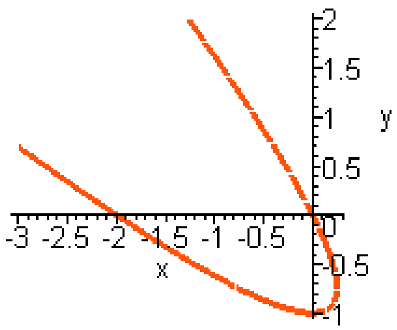
（1）双曲线，图形如下：



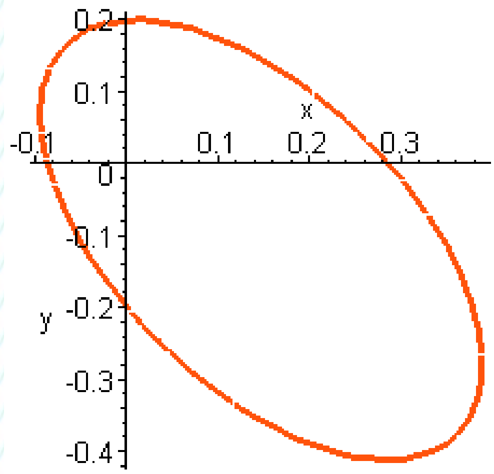
（2）双曲线，图形如下：



（3）抛物线，图形如下：



（4）椭圆，图形如下：



3．（1）$y_1^2 - y_2^2$；（2）$5y_1^2 + \frac{1}{5}y_2^2 + y_3^2$；（3）$y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2$；

（4）$2y_1^2 - 8y_2^2$ 或 $10y_1^2 - \frac{8}{5}y_2^2$；（5）$2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 6y_3^2$。

4．提示：$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为对角矩阵。记 $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$，则由假设得

$$\lambda_i = \boldsymbol{a}_i^{\ T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)。$$

即 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{O}$，于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$。

5．$a = 2$ 或 $a = -2$。

$$a = 2 \text{时，} \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}； \quad a = -2 \text{时，} \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}。$$

6．（1）$x = 2$；

（2）$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$。

§7 正定二次型

1．略。

2．（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$正定；（2）$\boldsymbol{AB}$不一定正定。例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$和$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$正定，但$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$并不正定（它不是对称矩阵）。

3．（1）不是；（2）是；（3）不是；（4）是。

4．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

5．$\boldsymbol{A}$的正定性证明略。$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{2} & \frac{\sqrt{2}-2}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{2} & \frac{\sqrt{2}+2}{2} \end{pmatrix}$。

6．提示：$\boldsymbol{A}$为n阶正定矩阵，则存在正交矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{\varLambda}$，因此$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\varLambda}\,\boldsymbol{S}^{T}$，其中$\boldsymbol{\varLambda}=\mathbf{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$为对角矩阵，且$\lambda_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$）。记

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\mathbf{diag}\left(\sqrt[m]{\lambda_1},\ \sqrt[m]{\lambda_2},\cdots,\sqrt[m]{\lambda_n}\right)\boldsymbol{S}^{T},$$

则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^m$。

7．提示：$-f$是正定二次型。

8．略。

9．（1）$\lambda>2$；（2）$-\frac{4}{5}<\lambda<0$。

10．提示：对任意n维实向量$\boldsymbol{x}$，n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{Ax})^{T}(\boldsymbol{Ax})\geq 0$。

11．提示：此时$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，又$\boldsymbol{A}$正定，所以$\boldsymbol{A}$的特征值只能是 1。因此存在正交矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{AS}=\mathbf{diag}(1,1,\cdots,1)=\boldsymbol{I}$，所以$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$。

12．提示：由于$\boldsymbol{A}$为n阶对称矩阵，则存在正交矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\varLambda S}$，其中$\boldsymbol{\varLambda}=\mathbf{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$为对角矩阵。于是，对任意$n$维实向量$\boldsymbol{x}$，

$$\boldsymbol{x}^{T}(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Sx})^{T}(\boldsymbol{\varLambda}+t\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Sx})。$$

由于$\boldsymbol{\Lambda}+t\boldsymbol{I}$为对角矩阵，当$t$充分大时其对角线元素均大于 0，此时可推知$\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$正定。

13．提示：由于$\boldsymbol{A}$正定，则有可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$。显然$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$是对称矩阵，所以存在正交矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$为对角矩阵。则$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$即为所求。

14．

（1）$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；（2）$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

15．（1）$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=0, \\ x_3=1; \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-1, \\ x_3=-1. \end{cases}$