答案与提示

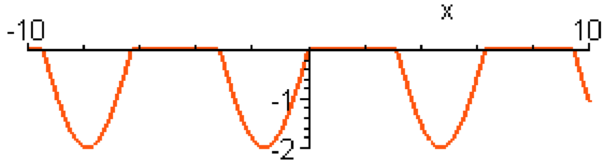
第一章 极限与连续

§1 函数

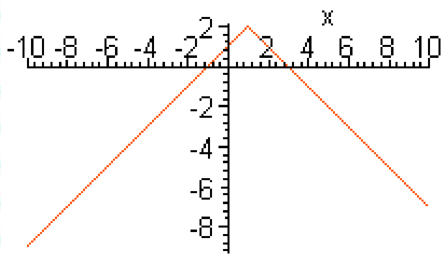
1．（1）$(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$；（2）$(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$；（3）$[-1,3]$；

（4）$(-\infty,0)\cup(0,5)$；（5）$[1,4]$；（6）$\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\left(2k+\dfrac{1}{4}\right)\pi,\ \left(2k+\dfrac{5}{4}\right)\pi\right]$。

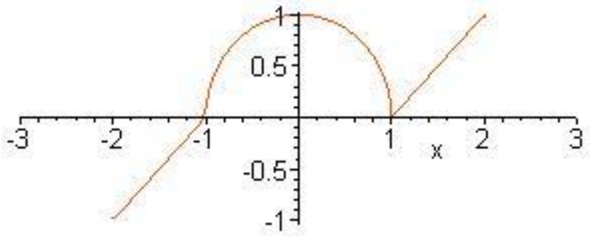
2．（1）



（2）



（3）



3．（1）偶函数；（2）偶函数；（3）偶函数；（4）奇函数。

4．略。

5．提示：令 $x=\dfrac{1}{t}$ 代入 f 满足的表达式，再与该表达式结合可解出

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)。$$

6．（1）非周期函数；（2）$T=\pi$；（3）$T=\dfrac{\pi}{2}$；（4）$T=2$。

7．略。

8．（1）无界；（2）无界；（3）无界；（4）无界。

9． $f\circ g(x)=2^{2x}$； $g\circ f(x)=2^{x^2}$； $f\circ f(x)=x^4$； $g\circ g(x)=2^{2^x}$。

10．（1） $f(u)=\sqrt{u}$， $u=3x-5$；（2） $f(u)=\sqrt{u}$， $u=\lg v$， $v=\sqrt{x}$；

（3） $f(u)=\sin u$， $u=\lg v$， $v=x^2+1$。

11．（1） $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$， $-2\le x\le 2$；（2） $y=\log_a\dfrac{x}{1-x}$， $0<x<1$；

（3） $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$， $-\infty<x<+\infty$；（4） $y=\cos\dfrac{x}{4}$， $0\le x\le 2\pi$。

§2 数列的极限

1．略。

2．提示：利用不等式$||a_n|-|a||\le|a_n-a|$。逆命题不成立，例如， $a_n=(-1)^{n+1}$。

3．（1）3；（2）2；（3）1；（4）0；（5）$\dfrac{1-b}{1-a}$；（6）$\dfrac{1}{2}$；（7）1；（8）$0<a<1$时极限为-1； $a=1$时极限为 0； $a>1$时极限为 1。

4．（1）$\{a_n+b_n\}$必发散；$\{a_nb_n\}$不一定发散；（2）$\{a_n+b_n\}$和$\{a_nb_n\}$均不一定发散。

5．提示： $a_n^2=\dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{2n+1}$。

6．提示：利用极限的夹逼性质。

7．（1）提示：$\{x_n\}$单调增加，且$x_n<2$； $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$；

（2）提示：$\{x_n\}$单调增加，且$x_n<\sqrt{2}+1$； $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$；

（3）提示：$\{x_n\}$单调增加，且$x_n<2$； $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

8．（1）略；（2）略。（3）提示：注意$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$（$n\ge 2$）。

§3 函数的极限

1．略。

2．提示：利用$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|\le\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}\le\frac{1}{\sqrt{A}}|f(x)-A|$。

3．（1）4；（2）na^{n-1}；（3）$-\frac{1}{x^2}$；（4）6；（5）$-\frac{1}{2}$；（6）$\frac{n(n+1)}{2}$。

4．（1）$\frac{m}{n}$；（2）1；（3）$-\sin x$；（4）$\frac{n^2-m^2}{2}$；（5）x；

（6）-1；（7）$-\frac{3}{5}$；（8）$\frac{1}{2}$。

5．$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=4$。

6．$\lim\limits_{x\to n+0}f(x)=0$（$n\ne 0$），$\lim\limits_{x\to n-0}f(x)=\frac{-1}{n(n-1)}$（$n\ne 0,1$），$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=-\infty$。

7．（1）e^8；（2）e^{-5}；（3）e^{-1}；（4）$e^{-\frac{1}{2}}$。

§4 连续函数

1．（1）正确；（2）不正确；（3）正确；（4）不正确。

2．（1）$x=-1$无穷间断点；（2）没有间断点；（3）$x=0$无穷间断点，$x=1$跳跃间断点；（4）$x=\frac{n}{k\pi}$（$k=\pm1,\pm2,\cdots$）跳跃间断点，$x=0$也是间断点；（5）$x=n$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）可去间断点；（6）$x=0$可去间断点。

3．提示：注意 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，并利用函数 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的连续性。

4．（1）e^2；（2）1。

5．（1）$\frac{1}{4}$；（2）$\frac{1}{6}\sqrt[3]{2}$；（3）1；（4）0；（5）-2；

（6）e；（7）-2；（8）$e^{-(a+b)}$；（9）e^{-2}；（10）e。

6．（1）$-\frac{1}{2}$；（2）$\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$。

7．（1）$4x^2$；（2）$x^{\frac{1}{3}}$；（3）$\frac{1}{2}x^2$；（4）$2x$；（5）$|x|$；（6）$\frac{1}{4}x^3$。

8．提示：利用极限的分析定义和闭区间上连续函数的有界性定理。

9．提示：令对函数 $f(x)=3^x-5x+1$ 在区间 $[0,1]$ 上应用零点存在定理。

10．提示：令对函数 $f(x)=x^3-4x+1$ 在区间 $[0,1]$ 上应用零点存在定理，再考虑其单调性。

11．提示：对函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ 在区间 $[0,a]$ 上应用零点存在定理。

12．提示：考虑函数 $F(x)=f(x)-x$，并在区间 $[0,1]$ 上应用零点存在定理。

13．提示:先讨论在 $x=a+b$ 点的情况,再在区间 $[0,a+b]$ 上运用零点存在定理.。

14．提示：运用反证法和介值定理。

15．提示：对 $c=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$ 在 $[x_1,x_n]$ 上应用介值定理。

16．$x=-1$ 和 $y=x-1$。

17．$y=x-\frac{1}{2}$ 和 $y=-x+\frac{1}{2}$。

18． $x=-2$， $x=1$和 $y=1$。