答案与提示

第四章 矩阵和线性方程组

§1 向量和矩阵

1．（1）$(3, 7, -19, -1, 10)^T$；（2）$(-2, 8, -19, 7, 6)^T$。

2．（1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -11 \\ -13 & 0 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 1 \\ 15 & -19 \end{pmatrix}$。

3．$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 16 & -8 \\ 7 & -28 & 14 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{CA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{C}) = \begin{pmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{pmatrix}$。

4．$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$且 $a^2 + bc = 0$。

5．（1）$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；（2）$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

6．$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 2$，$\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T = 5$，$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = (5, 6, -5)$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -10$。

7．$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 6 & 9 & -6 \\ -5 & -6 & 5 \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$。

8．10。

9．（1）$\begin{pmatrix} -9 & -2 & -8 \\ 5 & 12 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -4 & 3 & 24 \\ -6 & -25 & -4 \end{pmatrix}$。

10．（1）例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；

（2）例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$；

（3）例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。

11．提示：由矩阵乘法的定义直接得到。

12．（1）$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$；（2）$\boldsymbol{AB}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$。

13．（1）$\boldsymbol{Ax}$；（2）$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}$。

14．提示：直接验算。

15．提示：直接验算。

16．提示：利用分块乘法直接验算。

17．提示：直接验算。

18． $\boldsymbol{A}^{2k}=\boldsymbol{I}_{2k}$， $\boldsymbol{A}^{2k+1}=\boldsymbol{A}$（$k=1,2,\cdots$）。

19．提示：取$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mu&\boldsymbol{0}^T\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{O}_{n\times n}\end{pmatrix}$，其中$\mu$为非零实数，$\boldsymbol{O}_{n\times n}$为$n$阶零方阵。$\boldsymbol{0}$为$n$维零向量（列向量）。

§2 行列式

1．（1）-69；（2）512；（3）$(a^2-b^2)^2$；（4）$a^4-3a^2b^2+b^4$。

2．（1）160；（2）$(x+a+b)(b-x)(b-a)(a-x)$；

（3）$8abc$；（4）$(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$。

3．提示：利用数学归纳法。

4．提示：利用关于列的加减的行列式性质。

5．（1）1142；（2）$b^4-4a^2b^2$；（3）$(-1)^n\left(b^n-b^{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$；

（4）$[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$；（5）$a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$。

6．提示：（1）最后一列乘以(-1)分别加到前n列；
（2）按最后一列展开，再将所得的表达式中的每一个行列式按最后一行展开。

7．（1）不成立；（2）成立；（3）不成立。

§3 逆矩阵

1．$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。

2．（1）$\begin{pmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix} \frac{4}{13}-\frac{6}{13}\mathrm{i} & \frac{7}{13}-\frac{4}{13}\mathrm{i} \\ \frac{3}{13}+\frac{2}{13}\mathrm{i} & \frac{2}{13}-\frac{3}{13}\mathrm{i} \end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；（6）$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 9 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

3．$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{U}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix}$。

4．提示：利用 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$，注意当 $i>j$ 时 $\boldsymbol{A}^{*}$ 中的第 j 行第 i 列元素 $A_{ij}=0$。

5．略。

6．$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$。

7．$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$。

8．提示：利用 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{k}$。

9．提示：直接验证。

10．$\dfrac{1}{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\begin{pmatrix}1-x_2^2-x_3^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_1x_2 & 1-x_1^2-x_3^2 & x_2x_3\\ x_1x_3 & x_2x_3 & 1-x_1^2-x_2^2\end{pmatrix}$。

11．（1）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CB}$；（2）$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ -3 & -6 & 9\end{pmatrix}$。

12．-192。

13．

（1）$\begin{cases}x_1=-3,\\ x_2=0,\\ x_3=5;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x_1=-2,\\ x_2=0,\\ x_3=1,\\ x_4=5.\end{cases}$

14．系数行列式$\Delta=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$。当$a$，$b$，$c$互不相等且$a+b+c\neq 0$时，能用 Cramer 法则求解。其解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{(b+c+d)(b-d)(c-d)}{(a+b+c)(b-a)(c-a)},\\ x_2=\dfrac{(a+c+d)(d-a)(c-d)}{(a+b+c)(b-a)(c-b)},\\ x_3=\dfrac{(a+b+d)(d-a)(d-b)}{(a+b+c)(c-a)(c-b)}.\end{cases}$$

15．提示：用反证法。若$|\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}_{n\times n}$，于是对角元$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0$（$i=1,2,\cdots,n$），从而$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_{n\times n}$，与题设矛盾。

16．提示：将$n+1$个互异的零点代入原方程，便得一个关于$a_0,a_1,\cdots,a_n$的$n+1$元线性方程组，这个线性方程组的系数行列式是一个非零的 Vandermonde 行列式，因此只有零解，即$a_0=a_1=\cdots=a_n=0$，因此$f(x)\equiv 0$。

§4 向量的线性关系

1．（1）线性无关；（2）线性相关。

2．例如：$\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{c}=(3,0,0)$，则$-3\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，它们线性相关，但$\boldsymbol{b}$不能被$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$线性表出。

3．略。

4．略。

5．提示：用反证法。若有不全为零的常数$k_1, k_2, \cdots, k_m, k_{m+1}$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m + k_{m+1}(t\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = 0,$$

则易知$k_{m+1} \neq 0$，于是

$$\boldsymbol{b}_2 = -\frac{1}{k_{m+1}}(k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m) - t\boldsymbol{b}_1,$$

则由已知条件知，$\boldsymbol{b}_2$能被$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性表示。与题设矛盾。

6. 提示：设$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\boldsymbol{a}_i$（$j = 1, \cdots, r$），则$\boldsymbol{C} = (c_{ij})$可逆。若$\sum_{j=1}^{r} k_j\boldsymbol{b}_j + \sum_{j=r+1}^{s} k_j\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$，则

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} k_j c_{ij}\right)\boldsymbol{a}_i + \sum_{j=r+1}^{s} k_j\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0},$$

因此，$k_j = 0$（$j = r+1, \cdots, s$），以及$\sum_{j=1}^{r} k_j c_{ij} = 0$，由$\boldsymbol{C}$可逆知$k_j = 0$（$j = 1, \cdots, r$）。

7.（1）能；（2）不能。

8．提示：（1）记$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times p}$。由$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$知，

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}, \quad k = 1, 2, \cdots, p,$$

于是$b_{jk} = 0$（$j = 1, 2, \cdots, n$，$k = 1, 2, \cdots, p$），即$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$。

（2）的证明与（1）类似。

9．略。

10．提示：将$\boldsymbol{A}$的适当幂$\boldsymbol{A}^k$作用在$\lambda_1\boldsymbol{x} + \lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$上，便可得$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$。

§5 秩

1．略。

2．（1）3；（2）2。

3．（1）线性无关；（2）线性相关。

4．$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$。$\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$就是一个极大无关组。

5．提示：充分性：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$意味着$\boldsymbol{A}$中有一非零列向量，而其它列都是它的常数倍。

必要性：注意此时$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{bc}^T)\le 1$。

6．提示：注意$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\le\min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}),\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\}\le m<n$。

7．提示：（1）利用$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$；

（2）利用$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\ge\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-n$（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵）。

（3）$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n-1$意味着所有代数余子式$A_{ij}=0$。

8．提示：对$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}$和$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，分别应用 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\ge\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-n$和$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵）。

9．

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1/3&1/3\\0&1/3&-2/3\\1&-1/3&2/3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

注：$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$的解不唯一。

§6 线性方程组

1．（1）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-3\\7\\2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\\v\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}16\\9\\3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$。

2．$a=0$，$b=2$。

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}。$$

3．

（1）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}x\\y\\u\\v\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2/3\\7/3\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\8\\0\\-4\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1/7\\3/7\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4/7\\9/7\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12/7\\13/7\\0\\0\end{pmatrix}$。

4．（1）$\lambda=1$；

（2）提示：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$ 说明 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任何两个解都线性相关，于是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关。

5．$k=-2$ 时方程组无解；$k=1$ 时方程组有无穷多组解；其它情况方程组有唯一解。

6．当 $a\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时，方程组有唯一解。
当 $a=0$ 且 $a\neq b$ 时，方程组无解。
当 $a=b=0$ 时，方程组无解。
当 $a=b\neq 0$ 时，方程组有无穷多组解。

7．提示：$\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r\}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{r}k_ic_{ij}\right)\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r}k_ic_{ij}=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{C}^T)=0$，即 $\det(\boldsymbol{C})=0$。

8．（1）当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，且表达式唯一；

(2) 当 $\lambda=0$，$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，但表达式不唯一；

(3) 当 $\lambda=-3$，$\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示。

9．当 $c=1$ 时，方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为2，此时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

10．提示：若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的非零列向量就是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的非零解，因此 $|\boldsymbol{A}| = 0$。若 $|\boldsymbol{A}| = 0$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{\alpha}$，取 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0})$，则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$。

11．提示：必要性：三条直线交于一点 $\Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ bx + cy + az = 0, \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$ 有解 $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$，因此 $a+b+c=0$。

充分性：考虑方程组 $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ bx + cy + a = 0, \\ cx + ay + b = 0, \end{cases}$ 它等价于 $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ bx + cy + a = 0, \end{cases}$ 其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = (ac - b^2) = -\frac{1}{2}[a^2 + b^2 + (a+b)^2] \neq 0，$$

因此有解。