答案与提示

第十章 常微分方程

§1 常微分方程的概念

1.（1）不是；（2）是；（3）不是；（4）是。

2．略。

§2 一阶常微分方程

1．$y=\ln x-2$。

2.（1）$y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+C$，图略；（2）$y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+\frac{5}{4}$。

3.（1）$\ln y=-\frac{1}{\ln x+C}$（注意：$y=1$也是解，但不包含在通解中。本章答案中将只给出通解）；

（2）$\frac{(y+1)^3}{3}+\frac{x^4}{4}=C$；

（3）$y[C+a\ln(1-x-a)]=1$；

（4）$\cos x\cos y=C$；（5）$\tan x\tan y=C$；

（6）$2^x+2^{-y}=C$；（7）$\arcsin x-\arcsin y=C$；（8）$(e^x+1)(e^y-1)=C$；

（9）$\sec y(1+e^x)=C$；（10）$\cos x+(1+x)e^y=C$。

4.（1）$e^{2x}+2e^{-y}-3=0$；（2）$x^2y=1$；

（3）$(1+e^x)\sec y=2\sqrt{2}$；（4）$\cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

5．$Q(t)=Q_0e^{-\frac{\ln 2}{1600-t_0}(t-t_0)}$。

6．$u=\sqrt{\frac{9}{200}t+\frac{1}{25}}$。

7．提示：解方程$\begin{cases}\frac{dN}{dt}=kN(t),\\ N(0)=N_0\end{cases}$得$N(t)=N_0e^{kt}$。从$N(t_i)=N_0e^{kt_i}$（$i=1,2$）中消

去 k 即可。

8．$1000\ln 2$（min）。

9．提示：由 $dp=k(p_{\max}-p)$（k 为比例系数）得 $p=p_{\max}-(p_{\max}-p_0)e^{-k(t-t_0)}$，

其中 $p(t_0)=p_0$ 为在 t_0 时的人口数量。

10．6389（s）。

11．（1）$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$；（2）$-\frac{1}{4}\ln\frac{2y^2-2xy+x^2}{x^2}-\ln x+\frac{3}{2}\arctan\frac{2y-x}{x}=C$；

（3）$y^3=x^3+Cx^{\frac{3}{2}}$；（4）$\ln\frac{y}{x}=Cx+1$；（5）$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=(\ln x+C)^2$。

12．（1）$y^2=2x^2(\ln x+2)$；（2）$\frac{x+y}{x^2+y^2}=1$；

（3）$-\frac{1}{4}\ln\frac{2y^2-2xy+x^2}{x^2}-\ln x-\frac{3}{2}\arctan\frac{2y-x}{x}=-\frac{3\pi}{8}$。

13．（1）$(y+1)^2-4(y+1)(x-1)-(x-1)^2=C$；

（2）$(4y-3x+1)^2(x+y+2)^5=C$；

（3）$3\ln(x+y+2)-2x-y=C$。

14．$f(x)=\begin{cases}x(1-4\ln x), & 0<x\le 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

15．（1）是，通解为 $x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$；

（2）是，通解为 $\frac{4}{3}x^3+x^2y+xy^2+\frac{1}{3}y^3=C$；

（3）是，通解为 $xe^y-y^2=C$；

（4）是，通解为 $x\sin y+y\cos x=C$；

（5）是，通解为 $x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C$；

（6）不是。

16．（1）积分因子：$\frac{1}{y^2}$，通解：$\frac{x}{y}=C$；

（2）积分因子：$\frac{1}{y^2}$，通解：$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{y}-3xy=C$；

（3）积分因子：$\frac{1}{x^2+y^2}$，通解：$\ln(x^2+y^2)=2x+C$；

（4）积分因子：$\frac{1}{x^2}$，通解：$\frac{y^2}{x}+\ln x=C$；

（5）积分因子：$\frac{1}{xy}$，通解：$2\ln x-\frac{3}{2}x^2-\ln y=C$；

（6）积分因子：$\frac{1}{x^2y^2}$，通解：$-\frac{1}{xy}+\ln\frac{x}{y}=C$。

17.（1）$y=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}$；（2）$y=\frac{x^2}{4}-x+1+\frac{C}{x^2}$；

（3）$y=(x+C)\cos x$；（4）$y=-e^{-2x}+Ce^{-x}$；

（5）$y=1+Ce^{-x^2}$；（6）$y=\frac{2(x-2)^2}{3}+\frac{C}{x-2}$；

（7）$x=y^3\left(C+\frac{1}{2y}\right)$；（8）$x=\frac{1}{2}\ln y+\frac{C}{\ln y}$。

18.（1）$y=\frac{x}{\cos x}$；（2）$y=\frac{-\cos x+\pi-1}{x}$；

（3）$y=\frac{1-5e^{\cos x}}{\sin x}$；（4）$y=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^3e^{\frac{1}{x^2}-1}$。

19．$\cos^2 y=\sqrt{1+x^2}[\ln(1+x^2)+C]$。

20．$y=2e^x-2x-2$。

21．$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{x}}+\frac{2}{3}x$。

22．$f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$。

23.（1）$y=\frac{3x^2}{3C+x^3}$；（2）$\frac{1}{y}=-\frac{1}{3}+Ce^{-\frac{3}{2}x^2}$；

（3）$\frac{1}{y^2}=\frac{2}{5}\cos x-\frac{6}{5}\sin x+Ce^{2x}$；（4）$y^{-3}=Ce^x-2x-1$；

（5） $y=\dfrac{2}{Cx-x(\ln x)^2}$；（6） $y^2(4x^3+6x^3\ln x-C)+9x^2=0$。

24. $\dfrac{1}{\sin y}=-\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)+Ce^{-x}$。

25. 提示：微分方程的解为 $y=\dfrac{be^{-cx}}{a-c}+ke^{-ax}$（$a\neq c$）或 $y=(bx+k)e^{-ax}$（$a=c$），其中 k 为常数。

26. 函数 f 满足的微分方程 $y^2=\dfrac{1}{3}(2xy+x^2y')$，特解： $y=\dfrac{x}{1+x^3}$。

§3 二阶线性微分方程

1.（1） $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$；（2） $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$；

（3） $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$；（4） $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{5}{2}x}$；

（5） $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$；（6） $y=C_1e^{-4x}+C_2$；

（7） $y=C_1+C_2e^{3x}+C_3e^{2x}$；

（8） $y=C_1\cos\sqrt[4]{a}x+C_2\sin\sqrt[4]{a}x+C_3e^{\sqrt[4]{a}x}+C_4e^{-\sqrt[4]{a}x}$（$a>0$）；

（9） $y=(C_1+C_2x)\sin x+(C_3+C_4x)\cos x$；（10） $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$。

2.（1） $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$；（2） $y=\dfrac{7}{6}e^{3x}+\dfrac{5}{6}e^{-3x}$；

（3） $y=-\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$；（4） $y=2e^{2x}-4xe^{2x}$；

（5） $y=\dfrac{29}{7}e^x+\dfrac{6}{7}e^{-6x}$；（6） $y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2x}$。

3. $y=C_1e^x+C_2x-x^2-1$。

4. $y=C_1e^x+C_2(1+2x)$。

5. $y=x\sin x+\cos x\ln(\cos x)+C_1\cos x+C_2\sin x$。

6.（1） $y=\dfrac{41}{216}x+\dfrac{7}{72}x^2+\dfrac{5}{36}x^3+\dfrac{1}{24}x^4+C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$；

（2） $y=-\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{9}x+C_1+C_2e^{-3x}$；

（3） $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{36}x+\frac{19}{108}\right)xe^{3x}$；

（4） $y=\frac{1}{16}x\cos 2x+\frac{1}{8}x^2\sin 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$；

（5） $y=\left(\frac{22}{125}+\frac{4}{25}x\right)e^x\cos x+\left(\frac{4}{125}+\frac{3}{25}x\right)e^x\sin x+(C_1+C_2x)e^{3x}$；

（6） $y=\left(\frac{1}{13}x-\frac{29}{338}\right)\cos x-\left(\frac{3}{26}x+\frac{1}{169}\right)\sin x+C_1e^{5x}+C_2e^{-x}$；

（7） $y=\left(-\frac{51}{250}-\frac{2}{25}x+\frac{1}{10}x^2\right)\cos x+\left(-\frac{19}{250}-\frac{1}{5}x+\frac{1}{10}x^2\right)\sin x+C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$；

（8） $y=-\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{2}e^x+C_1\sin x+C_2\cos x$；

（9） $y=-\frac{4}{25}x\cos 2x+\left(\frac{11}{125}-\frac{1}{10}x^2\right)\sin 2x+C_1e^x+C_2e^{-x}$；

（10） $y=\frac{1}{50}-\frac{9}{3362}\cos 2x+\frac{20}{1681}\sin 2x+(C_1+C_2x)e^{\frac{5}{2}x}$。

7．（1） $y=-\frac{29}{81}+\frac{29}{81}e^{3x}-\frac{2}{27}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{9}x^3$；

（2） $y=-\frac{343}{648}e^{3x}-\frac{305}{648}e^{-3x}+\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{36}x+\frac{19}{108}\right)xe^{3x}$；

（3） $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+(2-x)\cos x+\sin x$；

（4） $y=\left(\frac{22}{125}+\frac{4}{25}x\right)e^x\cos x+\left(\frac{4}{125}+\frac{3}{25}x\right)e^x\sin x+\left(\frac{228}{125}-\frac{146}{25}x\right)e^{3x}$；

（5） $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{21}{13}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{43\sqrt{3}}{39}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{13}\sin 2x-\frac{3}{26}\cos 2x$。

8． $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$。

9． $\lambda=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$， $k=0,1,2,\cdots$。

10． $y=x^3+C_1x^2+C_2x$。

11． $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln x$。

12． $f(x)=\frac{1}{2}xe^x+\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}$。

13． $f(x)=\frac{3}{2}x^2-4e^{-x}-3x+4$， $u(x,y)=\left[\frac{3}{2}x^2+3x+4e^{-x}-2\right]y+C$。

14． $y=\begin{cases}-e^x, & x\le 0,\\ -e^x+\frac{1}{3}xe^x, & x>0.\end{cases}$

15．（1） $y=C_1x\cos(\ln x)+C_2x\sin(\ln x)$；

（2） $y=C_1x+c_2x^2+C_3x\ln x$；

（3） $y=C_1x^n+C_2x^{-(n+1)}$；

（4） $y=C_1\cos\ln(x+1)+C_2\sin\ln(x+1)$；

（5） $y=\frac{1}{2}x^2\ln x-x^2+3x\ln x+C_1x+C_2x\cos(\ln x)+C_3x\sin(\ln x)$；

（6） $y=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}+C_1x+C_2x^2$。

§4 可降阶的高阶微分方程

1．（1） $y=\frac{1}{2}x^2(\ln x-2)+\frac{1}{4}\cos^2 x+C_1x+C_2$；

（2） $y=(x-3)e^x+C_1x^2+C_2x+C_3$；

（3） $y=C_1+C_2\ln x$；

（4） $C_1y+\sqrt{1+(C_1y)^2}=C_2e^{\pm C_1x}$；

（5） $(2\sqrt{y}-C_1)\sqrt{4\sqrt{y}+C_1}=\pm 6x+C_2$；

（6） $\sin(y+C_1)=C_2e^x$；

（7） $\begin{cases}x=t^4+5t,\\ y=\frac{16}{45}t^9+\frac{7}{3}t^6+C_1t^4+\frac{25}{6}t^3+5C_1t+C_2;\end{cases}$

（8） $y=\frac{1}{36}x^4+C_1x(\ln x-1)+C_2x+C_3$；

（9） $y=C_1(x^2-\sin^2 x)+C_2x+C_3+\dfrac{x^2}{2}$；

（10） $y^2=C_1x^2+C_2$；

（11） $\ln y+\sqrt{C_1+(\ln y)^2}=C_2e^{\pm x}$；

（12） $y=C_1+C_2x+C_3e^{-4x}$；

（13） $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3x+C_4-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{1}{12}x^3-\dfrac{1}{24}x^4$。

2.（1） $y=xe^x-2e^x+x+2$；

（2） $y=xe^x-3e^x+ex+e$；

（3） $y=-\ln(x+1)$；

（4） $y=\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^4$；

（5） $y=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\ln 2$；

（6） $y^2=2x-x^2$。

3． $s(t)=s_0-\dfrac{m}{k}\ln 2+\sqrt{\dfrac{mg}{k}}t+\dfrac{m}{k}\ln\left(e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+1\right)$，其中 k 为空气阻力与物体下落速度的平方之间的比例系数， s_0 是物体静止时的高度。

4． $y^3=\dfrac{1}{2}\left(3x+\dfrac{1}{2}\right)^2$。

5． $y=e^x$。

§5 微分方程的幂级数解法

1.（1） $y=-1+Cx^3$；

（2） $y=Ce^x(x-3)^3$；

（3） $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$；

（4） $y=C_1x^{m+1}\left(1+\dfrac{1}{m+2}x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(m+2)(m+3)\cdots(m+n+1)}x^n\right)+C_2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 。

2．（1） $y=1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$；

（2） $y=x$ 。

§6 常系数线性微分方程组简介

1．（1） $\begin{cases}y_1=e^{-4x}[C_1(\cos x-\sin x)-C_2(\sin x+\cos x)],\\ y_2=2e^{-4x}(C_1\sin x+C_2\cos x);\end{cases}$

（2） $\begin{cases}y_1=C_1e^{2(\sqrt{3}-1)x}+C_2e^{-2(\sqrt{3}+1)x},\\ y_2=(2\sqrt{3}-3)C_1e^{2(\sqrt{3}-1)x}+(-2\sqrt{3}-3)C_2e^{-2(\sqrt{3}+1)x};\end{cases}$

（3） $\begin{cases}y_1=e^{2x}(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x),\\ y_2=\dfrac{1}{2}e^{2x}(C_1\cos 2x-C_2\sin 2x);\end{cases}$

（4） $\begin{cases}y_1=-e^x[C_1+C_2(x+1)+2C_3],\\ y_2=e^x(C_1+C_2x),\\ y_3=C_3e^x;\end{cases}$

（5） $\begin{cases}y_1=C_1e^x+C_2e^{-2x},\\ y_2=C_1e^x+(C_3-C_2)e^{-2x},\\ y_3=C_1e^x\quad -C_3e^{-2x};\end{cases}$

（6）

$$\begin{cases}y_1=7C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{19}{2}x}\left(6\cos\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x+\dfrac{282}{\sqrt{1495}}\sin\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x\right)+C_3e^{-\frac{19}{2}x}\left(-6\sin\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x+\dfrac{282}{\sqrt{1495}}\sin\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x\right),\\ y_2=-\dfrac{92}{\sqrt{1495}}e^{-\frac{19}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x-C_3\sin\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x\right),\\ y_3=2C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{19}{2}x}\left(5\cos\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x-\dfrac{115}{\sqrt{1495}}\sin\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x\right)+C_3e^{-\frac{19}{2}x}\left(-5\sin\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x-\dfrac{115}{\sqrt{1495}}\cos\dfrac{\sqrt{1495}}{2}x\right).\end{cases}$$

2．（1） $\begin{cases}y_1=C_1e^{-4x}+C_2(1+x)e^{-4x}-\dfrac{1}{36}e^{2x}+\dfrac{4}{25}e^x,\\ y_2=-C_1e^{-4x}-C_2(2+x)e^{-4x}+\dfrac{7}{36}e^{2x}+\dfrac{1}{25}e^x;\end{cases}$

（2）$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{4}(1-2x)e^{x} - \dfrac{1}{4}(2x+1)e^{-x}, \\ y_2 = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{4}(1+2x)e^{x} + \dfrac{1}{4}(2x-1)e^{-x}; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} y_1 = e^{-4x}[C_1(\sin x - \cos x) - C_2(\sin x + \cos x)] + \dfrac{29}{26}e^{x} - \dfrac{93}{17}, \\ y_2 = e^{-4x}(2C_1 \sin x + 2C_2 \cos x) + \dfrac{4}{13}e^{x} + \dfrac{6}{17}; \end{cases}$

（4）$\begin{cases} y_1 = \left(C_1 - C_2 x + \dfrac{1}{2}C_3 x^2\right)e^{-x} + x^2 - 3x + 3, \\ y_2 = (C_2 - C_3 x)e^{-x} + x, \\ y_3 = C_3 e^{-x} + x - 1. \end{cases}$

3.（1）$\begin{cases} y_1 = -C_1 x^{-2} + 3C_2 x^2, \\ y_2 = C_1 x^{-2} + C_2 x^2; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} y_1 = C_1 x^2 + C_2 x^{-1} + C_3 x, \\ y_2 = -C_1 x^2 + 2C_2 x^{-1} + C_3 x, \\ y_3 = 3C_1 x^2 + C_2 x^{-1} + 2C_3 x. \end{cases}$