答案与提示

第十一章 概率论

§1 概率

1.（1）$A_1A_2A_3A_4$；

（2）$A_1+A_2+A_3+A_4$；

（3）$A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4$；

（4） $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3+\overline{A}_4$。

（5） $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$；

（6）$\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4$。

2.（4）成立。

3. $\frac{8}{15}$。

4. 前两个邮筒没有信的概率：0.25。第一个邮筒只有一封信的概率：0.375。

5. $\frac{19}{36}$。

6. $\frac{1}{1260}$。

7. $\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$。

8. 0.066973。

9. 0.0063835。

10. 0.891。

11. $\frac{41}{81}$。

12. 0.5。

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

14. $\frac{1}{4}$。

15.（1）0.68；（2）0.597；（3）0.593。

16. 0.121。

17. $\dfrac{2l}{\pi a}$。

18. 0.3。

19. $P(\overline{A}B)=\dfrac{3}{20}$， $P(A\overline{B})=\dfrac{2}{5}$。

20. 0.28206。

21. 提示：不妨设$P(A)\le P(B)$，则

$$P(AB)-P(A)P(B)\le P(B)-P(A)P(B)\le P(A)[1-P(A)],$$

再利用不等式$x(1-x)\le\dfrac{1}{4}$（$x\in\mathbf{R}$）便得结论。

22. $\dfrac{5}{8}$。

§2 条件概率与事件的独立性

1. $\dfrac{5}{13}$。

2. 0.973。

3. 0.9。

4. 0.428571。

5. 次品的概率：$\dfrac{2}{25}$。甲厂产品的概率：$\dfrac{5}{8}$。

6. $\dfrac{5}{12}$。

7. 0.455207。

8. 11。

9. 工作正常：0.665。发生故障：0.335。

10. 0.9009。

11. $\frac{1}{3}$。

12. 0.825

13. $\frac{1}{3}$。

14. 灯亮的概率：0.8125。a 与 b 同时关闭的概率：0.3077。

15. $\frac{mp}{1+(m-1)p}$。

16. 题目应改为：电灯泡使用寿命在 1000h 以上的概率为 0. 8。答案：0.73728。

原题答案：0.00672。

17. 11。

18. 三局两胜制：0.648。五局三胜制：0.683。九局五胜制：0.733。比赛盘数越多，对强手越有利。

19. 0.901。

20.（1）$\frac{448}{475}$；（2）$\frac{95}{112}$。

21.（1）$\begin{cases} \frac{2^{2r}C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}, & 2r \le n, \\ 0, & 2r > n; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} \frac{2^{2r-4}C_n^2 C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}, & 2r \le n+2, \\ 0, & 2r > n+2; \end{cases}$ （3）$\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$。

§3 一维随机变量

1. ξ 的分布律：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{C_5^0 C_5^4}{C_{10}^4}$	$\frac{C_5^1 C_5^3}{C_{10}^4}$	$\frac{C_5^2 C_5^2}{C_{10}^4}$	$\frac{C_5^3 C_5^1}{C_{10}^4}$	$\frac{C_5^4 C_5^0}{C_{10}^4}$

2．$P(\xi=k)=\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots$。

3．（1）$P(\xi=2)=0.1$；

（2）ξ的分布律：

ξ	1	2	3
P	0.4	0.1	0.5

ξ的分布函数：$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.4, & 1\le x<2,\\ 0.5, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$

4．$c=\frac{37}{16}$，$P(\xi<1\mid\xi\ne 0)=0.32$。

5．$k=-\frac{1}{2}$，$P(1.5<\xi<2.5)=0.0625$。

6．（1）$A=1$；

（2）$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \frac{1}{4\pi}\left(2\pi+4\arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}\right), & -2\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$ 图略。

7．ξ的分布律：

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	0.6^6	$C_6^1 0.6^5\cdot 0.4$	$C_6^2 0.6^4 0.4^2$	$C_6^2 0.6^3 0.4^3$	$C_6^2 0.6^2 0.4^4$	$C_6^2 0.6\cdot 0.4^5$	0.4^6

η的分布律：

η	0	1	2	3	4	5	6
P	0.4	$0.4\cdot 0.6$	$0.4\cdot 0.6^2$	$0.4\cdot 0.6^3$	$0.4\cdot 0.6^4$	$0.4\cdot 0.6^5$	0.6^6

注：假定过了所有十字路口后停下。

8．$\frac{19}{27}$。

9．16。

10．0.888889 。

11．$1-\frac{1}{e^2}$。

12．η的分布律：

η	0	1	2	3	4	5
P	q^5	$C_5^1 pq^4$	$C_5^2 p^2 q^3$	$C_5^3 p^3 q^2$	$C_5^4 p^4 q$	p^5

其中$p=e^{-2}$，$q=1-p=1-e^{-2}$。

13．$P(\xi<2.5)=0.99379$，$P(\xi\geq -1)=0.841345$，

$P(-1.5\leq\xi\leq 1)=0.774538$ 。

14．$P(\xi>-1.5)=0.5497375$，$P(\xi<8)=0.987776$，

$P(|\xi|<4)=0.667723$。

15．（1）1.96；（2）1.96；（3）2.24。

16．（1）0.9545；（2）0.0007。

17．0.68269 。

18．$\sigma\leq 227.27$。

19. 0.2。

20. 0.0272。

21.（1）T 服从参数为 λ 的指数分布。

（2）$1-\left(1+3\lambda+\frac{9}{2}\lambda^2\right)e^{-3\lambda}$；

（3）$e^{-8\lambda}$。

22. ξ 的分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{2}, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

注意，从分布函数可以看出，随机变量 ξ 既不是连续型的，也不是离散型的。

§4 二维随机变量

1. 联合分布表：

ξ_1 \ ξ_2	0	1	2
0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	0
2	$\frac{1}{16}$	0	0

关于ξ_1的边缘分布律：

ξ_1	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

2． $a=\frac{1}{24}$， $b=\frac{3}{8}$， $c=\frac{1}{12}$ 或 $a=\frac{1}{8}$， $b=\frac{1}{8}$， $c=\frac{1}{4}$ 。

3．（1）联合分布表：

$\xi \backslash \eta$	$-\frac{1}{2}$	1	3
-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

（2） $P\{\xi+\eta=1\}=\frac{1}{12}$， $P\{\xi+\eta\neq 0\}=\frac{3}{4}$ 。

4．（1） $A=\frac{1}{\pi^2}$， $B=C=\frac{\pi}{2}$；

（2） $\varphi(x,y)=\frac{6}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)}$；

（3） $F_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)$， $\varphi_\xi(x)=\frac{2}{\pi(x^2+4)}$；

$$F_\eta(y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{2}\right),\qquad \varphi_\eta(x)=\frac{3}{\pi(y^2+9)};$$

（4）ξ与η相互独立。

5．$\dfrac{\pi}{4}$。

6．（1）$\varphi_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad \varphi_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）ξ与η不相互独立。

7．$c=6$，$P(\eta>2\xi)=\dfrac{1}{2}$。

8．$\dfrac{65}{72}$。

9．$b=0$，$A=\dfrac{\sqrt{ac}}{\pi}$（$a,c>0$）。

10．ξ的分布律：

η	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

11．$\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

12．$\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{a^3m}\sqrt{\dfrac{2y}{m\pi}}\,e^{-\frac{2y}{ma^2}}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

13．$\varphi_\eta(y)=\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$，$-\infty<y<+\infty$。

14．$\varphi_\eta(y)=\begin{cases} y e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

15．$\varphi_\eta(y)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

16．（1）(ξ,η)关于ξ的边缘分布：

ξ	0	1	2
P	0.4	0.45	0.15

（2）$\xi+\eta$的分布律：

$\xi+\eta$	0	1	2
P	0.1	0.4	0.5

（3）ξ与η不相互独立。

17．提示：记$q=1-p$，则

$$P(\xi+\eta=k)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi=i,\eta=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi=i)P(\eta=k-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}C_{n_1}^{i}p^{i}q^{n_1-i}C_{n_2}^{k-i}p^{k-i}q^{n_2+i-k}=\left(\sum_{i=0}^{k}C_{n_1}^{i}C_{n_2}^{k-i}\right).p^{k}q^{n_1+n_2-k}$$

注意到$\sum_{i=0}^{k}C_{n_1}^{i}C_{n_2}^{k-i}=C_{n_1+n_2}^{k}$，便得$P(\xi+\eta=k)=C_{n_1+n_2}^{k}p^{k}q^{n_1+n_2-k}$。

18．提示：

$$P(\xi+\eta=k)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi=i,\eta=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi=i)P(\eta=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1{}^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2{}^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1{}^i\lambda_2{}^{k-i}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k.$$

19．$F_\varsigma(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad \varphi_\varsigma(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

20．$F_\varsigma(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{a^2-(a-z)^2}{a^2}, & 0\le z<a,\\ 1, & z\ge a.\end{cases}$

21．$\varphi_\varsigma(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

22．$\varphi_\mu(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2}{2}e^{-z}, & z\ge 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

§5　随机变量的数字特征

1．种子甲：4944。种子乙：4959。

2．$E\xi=2$，$D\xi=2$。

3．$a=12$，$b=-12$，$c=3$。

4．（1）$E\xi=0$，$D\xi=2$；（2）$E\xi=\dfrac{67}{44}$，$D\xi=\dfrac{787}{9680}$；

（3）$E\xi=0$，$D\xi=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{1}{2}$。

5．$E\xi=\dfrac{\pi}{2}-1$，$D\xi=\pi-3$。

6．提示：

$$\begin{aligned} D\xi &= E(\xi - E\xi)^2 = E[(\xi - c) - E(\xi - c)]^2 \\ &= D(\xi - c) = E(\xi - c)^2 - [E(\xi - c)]^2 = E(\xi - c)^2 - (E\xi - c)^2. \end{aligned}$$

7．提示：

$$\begin{aligned} &D(\xi\eta) - D\xi D\eta = \{E(\xi\eta)^2 - [E(\xi\eta)]^2\} - [E\xi^2 - (E\xi)^2][E\eta^2 - (E\eta)^2] \\ &= [E\xi^2 - (E\xi)^2](E\eta)^2 + [E\eta^2 - (E\eta)^2](E\xi)^2 = D\xi(E\eta)^2 + D\eta(E\xi)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

8．数学期望：1；方差：$\frac{1}{3}$。

9．数学期望：$\frac{3}{10}$。方差：$\frac{351}{1100}$。

10．ς 的分布律：

ζ	1	2	3
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

数学期望：$E(\zeta) = \frac{14}{9}$。

11．（1）$c = 6$；

（2）$P(\xi + \eta \leq 1\} = \frac{3}{4}$；

（3）$E(Z) = \frac{3}{2}$，$D(Z) = \frac{3}{20}$。

12．$E(\xi - \eta) = \frac{1}{18}$，$D(\xi - \eta) = \frac{1019}{324}$。

13．提示：注意 $\max\{\xi, \eta\} = \frac{1}{2}(\xi + \eta + |\xi - \eta|)$，而 $E(\xi) = E(\eta) = 0$。由于 $\xi - \eta \sim N(0, 2)$，所以

$$E(|\xi - \eta|) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |z| e^{-\frac{z^2}{4}} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

于是 $E(\max\{\xi,\eta\})=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$。

14．提示；

$$P\{\xi\ge a\}=\int_a^{+\infty}\varphi_\xi(x)dx\le\int_a^{+\infty}\frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda a}}\varphi_\xi(x)dx$$
$$=\frac{1}{e^{\lambda a}}\int_a^{+\infty}e^{\lambda x}\varphi_\xi(x)dx\le\frac{1}{e^{\lambda a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda x}\varphi_\xi(x)dx=e^{-\lambda a}Ee^{\lambda\xi}.$$

15．3500 。

16． $E(\sin\xi)=0$， $D(\sin\xi)=\dfrac{1}{4}$。

17．（1） $E(\xi)=\dfrac{n+1}{2}$， $D(\xi)=\dfrac{n^2-1}{12}$。

（2） $E(\xi)=n$， $D(\xi)=n(n-1)$。

18． $E(\xi)=0.8$， $E(\eta)=0.6$， $E(\xi\eta)=0.5$， $E(\xi^2+\eta^2)=\dfrac{16}{15}$。

19．（1） $\rho=0$；（2） ξ 与 η 不独立。

20． $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=\begin{cases}n!!, & n\text{为奇数},\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}.$ $\rho(\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}}, & n\text{为奇数},\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}.$

21．（1） $E(\xi)=E(\eta)=\dfrac{7}{6}$；

（2） $D(\xi)=D(\eta)=\dfrac{11}{36}$；

（3） $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=-\dfrac{1}{36}$， $\rho(\xi,\eta)=-\dfrac{1}{11}$。

22. 题目中 $\mathrm{Cov}(\bar{\xi},\xi)$ 应为 $\mathrm{Cov}(\bar{\xi},\xi_1)$。 $E(\eta)=2$，$\mathrm{Cov}(\bar{\xi},\xi_1)=\dfrac{1}{3}$，$\mathrm{Cov}(\bar{\xi},\eta)=0$。

23．　提示：显然 $E(\xi)=P(A)$， $E(\eta)=P(B)$， $E(\xi\eta)=P(AB)$。因此

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=P(AB)-P(A)P(B)。$$

这就说明，ξ 和 η 不相关等价于 A 与 B 独立，而显然 A 与 B 独立等价于 ξ 和 η 相互独立。因此，ξ 和 η 相互独立等价于 ξ 和 η 不相关。

24．（1） $E(\varsigma)=\dfrac{1}{3}$， $D(\varsigma)=3$；

（2） $\rho(\xi,\varsigma)=0$；

（3） ξ 与 ζ 不一定相互独立。

§6　大数定律和中心极限定理

1．0.709 。

2．250 。

3．提示：

$$E(|\xi|^r)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r\ \varphi_\xi(x)dx\ge\int_{|x|\ge\varepsilon}|x|^r\ \varphi_\xi(x)dx$$

$$\ge\varepsilon^r\int_{|x|\ge\varepsilon}\varphi_\xi(x)dx=\varepsilon^r P(|\xi|\ge\varepsilon).$$

4．0.0002 。

5．0.1814 。

6．（1）0；（2）0.010724 。

7．0.5 。

8．321 （Q W）。

9．643 件。

10．103 只。

11．12655 只。

12．14 条。

13．提示：易知$D(\xi_i^2)=\alpha_4-\alpha_2^2$（$i=1,2,\cdots,n$）。由中心极限定理知，当$n$充分大时，$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i^2-\alpha_2)}{\sqrt{n(\alpha_4-\alpha_2^2)}}$，即$\dfrac{\eta_n-\alpha_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)}}$近似服从标准正态分布，因此$\eta_n$近似服从正态分布，且近似地有$\eta_n\sim N\left(\alpha_2,\dfrac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)\right)$。