答案与提示

第二章 微分与导数

§1 微分与导数的概念

1．1.12（g）。

2．（1）$3x^2dx$；（2）$-\dfrac{1}{x^2}dx$。

3．（1）$-f'(x_0)$；（2）$f'(x_0)$；（3）$2f'(x_0)$。

4．略。

5．当$\alpha>1$时可导，且$f'(0)=0$。当$0<\alpha\le 1$时，不可导。

6．切线：$y=2x_0x-y_0$；法线：$y=-\dfrac{1}{2x_0}(x-x_0)+x_0^2$。

7．提示：计算椭圆上的点到两个焦点的直线和切线的交角的正切值。

§1 求导运算

1．（1）$4+10x$；（2）$\cos x-x\sin x+e^x(\sin x+\cos x)$；

（3）$\dfrac{96x}{(3+2x)^3}$；（4）$x\sec^2 x(6\sin x\cos x+4\cos x+2x\sin x+3x)$；

（5）$xe^{3x}(2\cos 4x+3x\cos 4x-4x\sin 4x)$；（6）$-\dfrac{2(x+\sin x\cos x)}{(x\sin x-\cos x)^2}$；

（7）$\dfrac{1+\sec x\tan x}{x-\csc x}-\dfrac{(x+\sec x)(1+\csc x\cot x)}{(x-\csc x)^2}$；（8）$e^x\left(1+e^{e^x}\right)$。

2．（1）$3^x\ln 3+\dfrac{1}{x\ln 3}$；（2）$2x\arcsin x+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$；

（3）$\left(e^x+\dfrac{1}{x}\right)\arcsin x+\dfrac{e^x+\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$；（4）$-\dfrac{x^2-\mathrm{sh}x}{\sqrt{1-x^2}}+\arccos x(2x-\mathrm{ch}x)$；

（5）$\dfrac{2a}{a^2-x^2}$；（6）$\dfrac{2x^2\sqrt{x^2-a^2}+a^2\sqrt{x^2-a^2}+a^2\sqrt{x^2+a^2}}{2\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{x^2+a^2}}$；

（7）$\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{2\left[(a+b)+(a-b)\tan^2\dfrac{x}{2}\right]}$。

3．（1）$x^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x}\right)$；（2）$\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x^2}\left[2x\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{x}{1+x}\right]$；

（3）$x^{1+x}\left(\ln x+\dfrac{x+1}{x}\right)+(\sin x)^{\cos x}(\cos x\ln\sin x+\cos x)$；

（4）$\dfrac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right]$。

4．题目应为在点$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$。答案：$y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}=0$。

5．提示：直接计算。

6．471 m/s。

7．$\dfrac{1}{500\pi}$ m/s。

8．$3\sqrt{3}$ m/s。

9．（1）$\dfrac{\sin\ln x-\cos\ln x}{x^2}$；（2）$\dfrac{2-x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

（3）$e^{2x}(4\sin\beta x+4\beta\cos\beta x-\beta^2\sin\beta x)$；（4）$3x^2e^{3x}(3x^2+8x+4)$。

（5）$e^{x+e^x}+e^{2x+e^x}$；（6）$x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$。

10．（1）$(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$；（2）$\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$；

（3）$-\dfrac{1}{2}(2\omega)^n\cos\left(2\omega x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$；（4）$2^x(\ln 2)^n$；

（5）$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}e^{\alpha x}\sin(\beta x+n\varphi)$，其中$\cos\varphi=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$。

11．（1）$2450\cdot 2^{48}\sin 2x+100\cdot 2^{49}x\cos 2x-2^{50}x^2\sin 2x$；（2）$100\mathrm{ch}x+x\mathrm{sh}x$。

12．$f'(0)=1$，$f^{(2k+1)}(0)=[(2k-1)!!]^2$，$f^{(2k)}(0)=0$（$k=1,2,\cdots$）。

13．$a=2$，$b=-1$。

14．（1）$2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$；（2）$\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$。

15．提示：$\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\dfrac{dx}{dy}$。

§3 微分运算

1．（1）$(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$；（2）$\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}dx$；

（3）$\dfrac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；（4）$e^{2x}(3x^2+2x^3)dx$；

（5）$(2\tan x\sec^2 x-\tan x)dx$；（6）$e^{-x}[2\cos(2x+3)-\sin(2x+3)]dx$；

（7）$-\dfrac{2x}{1+x^4}dx$；（8）$2xe^{x^2}\tan(1+3x^2)[\tan(1+3x^2)+6\sec^2(1+3x^2)]dx$。

2．（1）$\dfrac{vdu-udv}{u^2+v^2}$；（2）$\dfrac{udu+vdv}{u^2+v^2}$。

3．（1）$\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$；（2）$\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$；

（3）$\dfrac{1}{e^y(x+y)-(x+y)-1}$；（4）$-\dfrac{e^y}{2y+xe^y}$。

4．（1）$\dfrac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$；（2）$-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$；

（3）$-\dfrac{b^2(b^2x^2-a^2y^2)}{a^4y^3}$；（4）$-\dfrac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}$。

5．$2bx-\sqrt{3}ay-ab=0$。

6．$3x+4\sqrt{3}y-24=0$。

7．（1）$\dfrac{3}{2}(t+1)$；（2）$\dfrac{t\sin t-\cos t}{t\cos t+\sin t-1}$；（3）$\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$。

8．（1）$-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$；（4）$\dfrac{4}{9}e^{3t}$。

9．提示：直接验算。

10．$2\pi R_0 h$。

11．$-\dfrac{125\pi}{9}$；$\dfrac{100\pi}{3}$。

12．$g_0\left(1-\dfrac{2h}{R}\right)$。

13．（1）0.4849；（2）-0.8747；（3）0.800175；（4）2.00517；（5）0.001998。

14．$\delta_V=10\pi$（cm^3），$\delta_V^*=0.0075$。

15．0.06 cm。

§4 微分学中值定理

1．3 个，分别在$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$内。

2．略。

3．提示：对函数$f(x)=\dfrac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\dfrac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_nx$在$[0,1]$上应用 Rolle 定理。

4．略。

5．略。

6．提示：$f(x+B)-f(x)=f'(\xi)B$，再令$x\to+\infty$。

7．提示：对$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$在$[a,b]$上应用 Cauchy 中值定理。

8．提示：令$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则$f(1)>0$，$f(0)<0$，且$f'(x)>0$（$x\in[0,1]$）。$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$。

9．提示：考虑$[f(a+b)-f(b)]-[f(a)-f(0)]$，对括号中的两式分别应用 Lagrange 中值定理，并利用f'的单调减少性质。

10．提示：对$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}$连续运用 Cauchy 中值定理。

§5 L'Hospital 法则

1．（1）2；（2）$\dfrac{3}{5}$；（3）$-\dfrac{1}{8}$；（4）$-\dfrac{1}{2}$；（5）$\dfrac{7}{54}$；（6）-2；（7）0；（8）1；（9）$-e$；（10）$\dfrac{1}{2}$；（11）$\dfrac{1}{a}$；（12）0；（13）$+\infty$；（14）1；（15）$+\infty$；（16）$-\dfrac{1}{2}$；（17）0；（18）$\dfrac{1}{2}$；（19）$e^{\frac{1}{3}}$；（20）1；（21）e^2；

（22）1；（23）1；（24）-1。

2．（1）$\ln a$；（2）$\ln a$。

3． 0。

4．连续。提示：$\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$。

5． $f'(0)=5$。

§6 Taylor 公式

1．（1）$1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{5}{16}x^3+\dfrac{35}{128}x^4-\dfrac{63}{256}x^5+o(x^5)$；

（2）$x^3-x^5+o(x^5)$；

（3）$1-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+\dfrac{3}{128}x^4+\dfrac{3}{256}x^5+o(x^5)$。

2．（1）$-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$；

（2）$2\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})\right)$；

（3）$1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+\dfrac{5}{16}x^6+\cdots+\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+o(x^{2n})$；

（4）$2x^2-\dfrac{2^3}{3!}x^4+\dfrac{2^5}{5!}x^6-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$。

3．（1）$x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$；

（2）$x^2+\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^5)$。

4．$\sin 1+\cos 1\cdot(x-1)-\dfrac{1}{2}\sin 1\cdot(x-1)^2-\dfrac{1}{6}\cos 1\cdot(x-1)^3+o((x-1)^3)$。

5．提示：$f(x+2h)=f(x)+f'(x)(2h)+\dfrac{1}{2}f''(x)(2h)^2+o(h^2)$，

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2)\text{。}$$

$$f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)=f''(x)h^2+o(h^2)\text{。}$$

6． 提 示 ： 利 用 $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+R_2$ 得 $\sqrt{1.01}\approx 1.0049875$ 。 误 差

$|R_2|< 6.25\times 10^{-8}$。

7．绝对误差$|R_3|\le 0.00026$。

8．（1）$\frac{1}{3}$；（2）$\ln^2 a$；（3）1；（4）$-\frac{1}{12}$。

9．提示：$\theta(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$，再运用 L'Hospital 法则。

10．提示：设$f(x_0)=-1$，则$f'(x_0)=0$。以$x=0$和$x=1$分别代入f在点x_0的 Taylor 公式$f(x)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，便得$\max\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\ge\dfrac{1}{x_0^2}+\dfrac{1}{(1-x_0)^2}\ge 8$。

11．提示：设$|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$。若$x_0=a$或$b$，则结论自然成立；若$a<x_0<b$，以$x=a$和$x=b$分别代入$f$在点$x_0$的 Taylor 公式$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，再讨论便得到结论。

12．提示：任取$x_0\in[0,1]$，以$x=0$和$x=1$分别代入$f(x)$在点x_0的 Taylor 公式得到

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi){x_0}^2,$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2,$$

两式相减，便得$|f'(x_0)|\le|f(0)|+|f(1)|+[{x_0}^2+(1-x_0)^2]\le 3$。

§7　函数的单调性和凸性

1．略。

2．（1）f在$(-\infty,0]$和$[2,+\infty)$上单调减少，在$[0,2]$上单调增加。$f(0)=0$极小值，$f(2)=4$极大值；

（2）f在$(-\infty,0]$上单调增加，在$[0,+\infty)$上单调减少。$f(0)=-1$极大值；

（3）只在一个周期$[0,2\pi]$上考虑，其它区间的性质可以按函数的周期性得到。

f在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$和$\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$上单调增加，在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$上单调减少。$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$极大

值，$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 极小值；

（4） f 在$[1,e^2]$上单调增加，在$(0,1]$和$[e^2,+\infty)$上单调减少。$f(1)=0$极小值，$f(e^2)=\frac{4}{e^2}$极大值。

3．（1） f 在$(0,e]$上单调增加，在和$[e,+\infty)$上单调减少；

（2） $e^\pi>\pi^e$。

4．提示：（1）考虑函数 $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$ 的单调性；

（2）考虑函数 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ 的单调性；

（3）考虑函数 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ 的单调性。

5．（1）略；（2）提示：利用（1）结论可以证明函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$ 严格单调减少，因此当 $x\in(0,1)$ 成立

$$\frac{1}{\ln 2}-1=f(1)<f(x)<\lim_{x\to 0+0}f(1)=\frac{1}{2}。$$

6．提示：$\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$，再考虑 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$。

7．（1） $f(2)=-14$ 为最小值， $f(3)=11$ 为最大值；

（2） $f(1)=\frac{1}{2}$ 为最小值， $f(2)=\frac{4}{5}$ 为最大值；

（3） $f(0)=-1$ 为最小值，无最大值；

（4） $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ 为最大值；无最小值；

（5） $f(0)=0$ 为最小值；无最大值。

8．提示：利用函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调增加性质，比较该函数在 $|a+b|$ 与 $|a|+|b|$ 处的值。

9．提示：利用 $f(x)=x^2-2ax+1-e^x$ 的三阶导数 $f'''(x)<0$，说明 $f'(x)<0$。

10． $0<k<1$。

11． $x=\frac{1}{6}(a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2})$。

12． $\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$；

13． $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$。

14．提示：分别考虑函数 $f(x)=x^n+(100-x)^n$ 和 $g(x)=x^n(100-x)^n$ 在 $(0,100)$ 上的最值问题。

15．提示：考虑光线行进距离的最小值问题。

16． 17.5。

17.（1）在 $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$ 上凸，在 $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$ 下凸。$\left(\frac{5}{3},\frac{20}{27}\right)$ 为拐点；

（2）在 $(-\infty,+\infty)$ 下凸，无拐点；

（3）在 $(-\infty,0)$ 上凸，在 $(0,+\infty)$ 下凸，无拐点；

（4） $(-\infty,2)$ 上凸，在 $(2,+\infty)$ 下凸，$\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$ 为拐点。

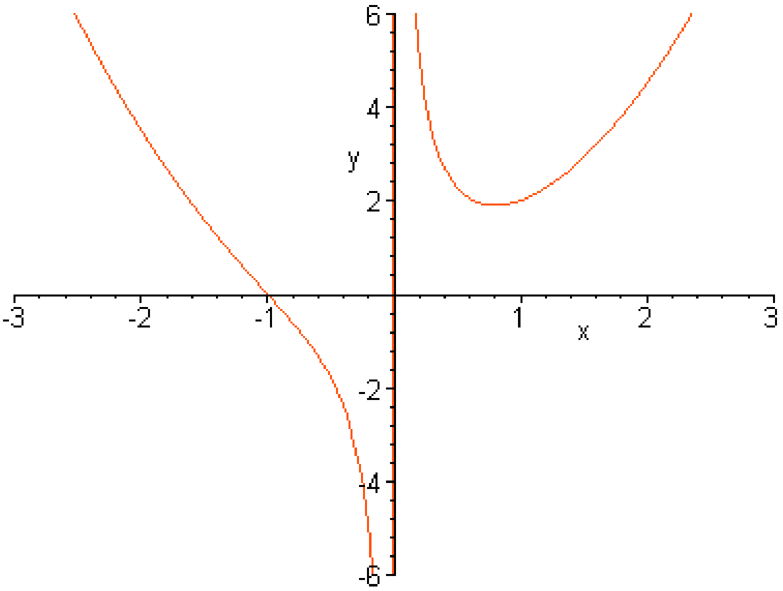
18.（1） $(1,4)$；（2） $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{3}{2}a\right)$ 和 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{3}{2}a\right)$。

19．提示：拐点为 $(-1,1)$，$\left(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$，$\left(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$。

20． $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$。

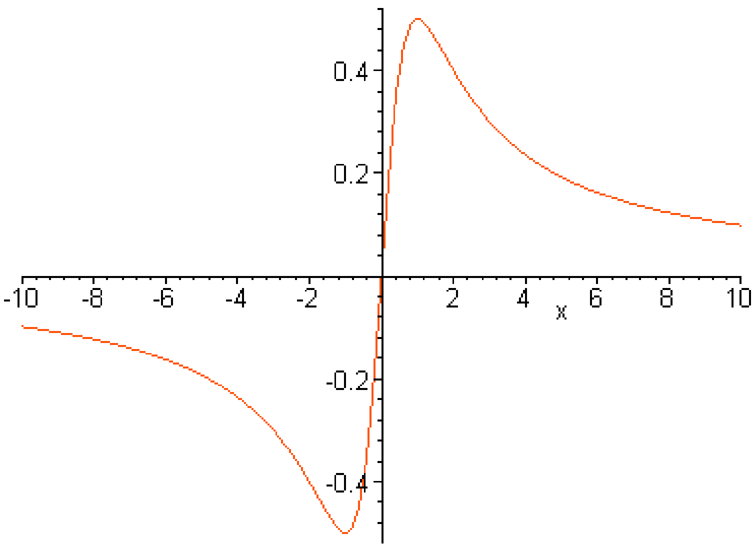
21，略。

22.（1）



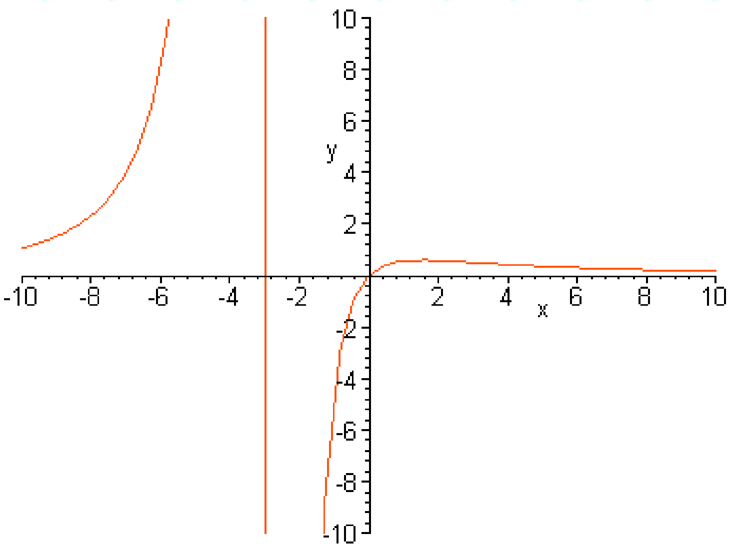
6
4
y
2
-3
-2
-1
1
x
2
3
-2
-4
-6

（2）



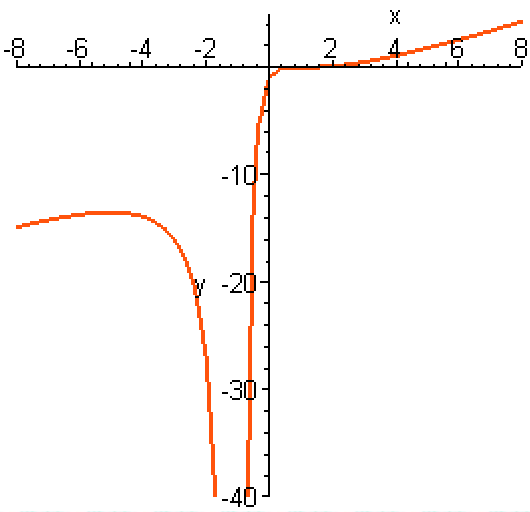
0.4
0.2
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
x
6
8
10
-0.2
-0.4

（3）



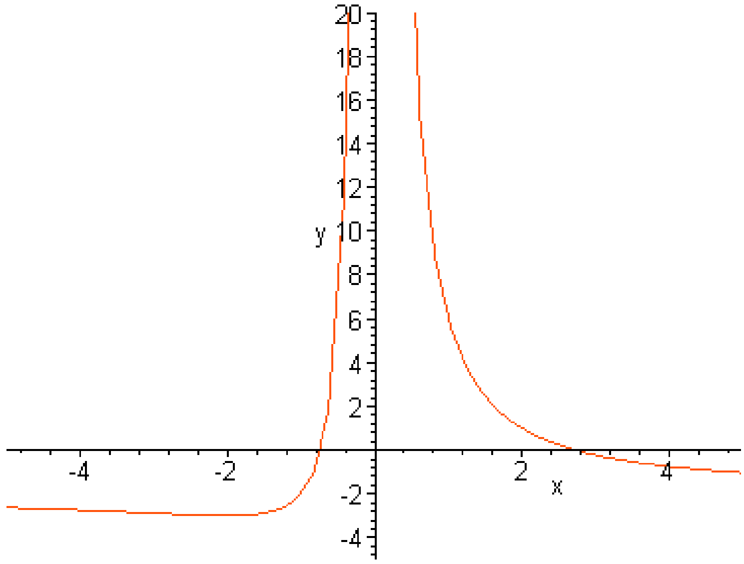
10
8
6
y
4
2
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
x
6
8
10
-2
-4
-6
-8
-10

（4）



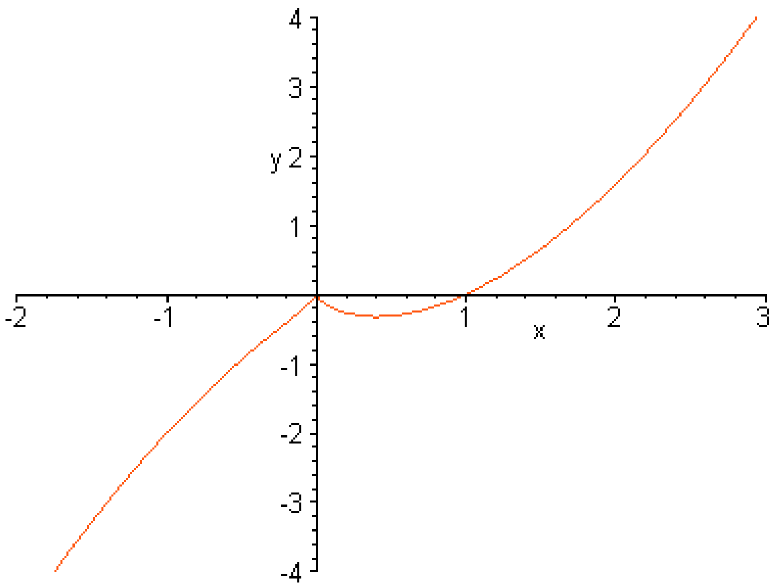
x
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
y
-10
-20
-30
-40

（5）



20
18
16
14
12
y 10
8
6
4
2
-2
-4
x
-4
-2
2
4

(6)



4
3
y 2
1
-1
-2
-3
-4
-2
-1
1
2
3
x

§8 函数方程的近似求解

1．（1）−1.7963；（2）0.491和9.999；（3）1.76322；（4）−0.56714；（5）1.895494282和−1.895494282；（6）4.730 和 7.853（还有，只算了两个）。.

2． 4.493409457909064。

3． 2.08157597781810和5.94036999057271。