答案与提示

第九章 级数

§1 数项级数

1．（1）发散；（2）发散；（3）收敛，和为 1；（4）收敛，和为$1-\sqrt{2}$；

（5）收敛，和为$\frac{1}{5}$；（6）发散；（7）收敛，和为$\frac{1}{4}$；（8）收敛，和为$\frac{\pi}{4}$。

2．（1）$\frac{4}{3n(n+1)\sqrt{n^2+n}}$；（2）$\frac{4}{3}$。

3．略。

4．（1）收敛；（2）发散；（3）收敛；（4）收敛；（5）收敛；（6）收敛；
（7）发散；（8）收敛；（9）收敛；（10）收敛；（11）收敛；（12）收敛；
（13）发散；（14）收敛；（15）收敛；（16）收敛；（17）发散；（18）收敛。

5．提示：（1）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$收敛；（2）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$收敛。

6．（1）收敛；（2）发散；（3）收敛。

7．提示：若$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则当n充分大时成立$x_n^2<x_n$。反之，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛，不一定能推出$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。例如，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

8．提示：当$p>\frac{1}{2}$时，利用$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\le\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$。当$0<p\le\frac{1}{2}$时，结论不一定成立。例如，$x_n=\frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$（$n=2,3,\cdots$），$\sum_{n=2}^{\infty}x_n$收敛，但$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$发散。

9．提示：$\{nx_{n+1}\}$是单调增加数列。

10．（1）当$x\ne 0$时条件收敛，当$x=0$时绝对收敛；（2）当$|\sin x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$时绝对收敛；当$|\sin x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$时条件收敛；当$|\sin x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$时发散；（3）绝对收敛；（4）发散；（5）条件收敛；（6）条件收敛；（7）发散；（8）条件收敛；（9）当$|x|<2$时

绝对收敛；当$|x|\ge 2$时发散；

（10）仅讨论$p,q>0$的情况。当$|x|<1$时绝对收敛。当$|x|>1$时，发散。

当$x=1$时，$p>1$时绝对收敛；$p=1$时，若$q>1$，绝对收敛，若$q\le 1$，发散；$0<p<1$时发散。

当$x=-1$时，$p>1$时绝对收敛；$p=1$时，若$q>1$，绝对收敛，若$q\le 1$，条件收敛；$0<p<1$时条件收敛。

11．不一定。例如级数$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$发散。

12．不一定。

13．收敛，提示$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$存在，且$a>0$。

14．提示：从$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$可知$f(0)=0$，$f'(0)=0$。因此由 Taylor 公式可知$f\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$，其中$M=\max\limits_{x\in[-1,1]}|f''(x)|$。

15．（1）1；（2）提示：作变换$\tan x=t$得

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}。$$

16．略。

§2 幂级数

1．（1）$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$；（2）$(-\infty,0)$；（3）$(-\infty,+\infty)$。

2．（1）收敛半径$R=1$，收敛域$[4,6)$；

（2）收敛半径$R=+\infty$，收敛域$(-\infty,+\infty)$；

（3）收敛半径$R=\frac{1}{3}$，收敛域$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$；

（4）收敛半径$R=1$，收敛域$(-2,0]$；

（5）收敛半径$R=e$，收敛域$(-e,e)$；

（6）收敛半径 $R=\sqrt{2}$，收敛域 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$；

（7）收敛半径 $R=1$，收敛域 $(0,2)$；

（8）收敛半径 $R=e$，收敛域 $(-e,e)$；

（9）收敛半径 $R=\frac{1}{a}$，收敛域 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$；

（10）收敛半径 $R=a$，收敛域 $(-a,a)$。

3．（1）$\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,1)\text{且}x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

（2）$\frac{x^2}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$；

（3）$\frac{1}{(2x-1)(x-1)}$，$x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；

（4）$\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$，$x\in(-1,1)$；

（5）$\frac{2x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$；

（6）$\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)-x, & x\in(-1,1],\\ 1, & x=-1;\end{cases}$

（7）$\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}, & x\in(-1,1)\text{且}x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

（8）$\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}$，$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。

4．略。

5．（1）12；（2）$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$；（3）$\ln 2$；（4）$-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$；

（5）$\frac{11}{27}$；（6）$\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$。

6．（1）$5+11(x-1)+12(x-1)^2+5(x-1)^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n}\right]x^n$， $x\in(-1,1)$；

（3）$x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$， $x\in[-1,1]$；

（4）$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$， $x\in(0,4]$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}$， $x\in[-1,1]$；

（6）$\sqrt[3]{4}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\dfrac{(-1)^n}{4^n}x^{2n}$， $x\in[-2,2]$；

（7）$\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^{2n}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^{2n+1}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}(x-1)^n$， $x\in(-1,3)$；

（9）$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（10）$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}\right)x^n$， $x\in(-1,1)$。

7．（1）0.946；（2）0.905；（3）0.487。

8．$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$， $x\in[-1,1]$。

9．$\dfrac{\sqrt{2}x^2}{(1-\sqrt{2}x^3)^2}$， $x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}},\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$。

10．提示：对$\dfrac{e^x-1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$两边求导，再取$x=1$。

11．$\ln\left(2+\sqrt{2}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

§3 Fourier 级数

1．（1）$-\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$；

（2）$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos 2nx$；

（3）$\dfrac{b-a}{4}\pi+\dfrac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$。

2．（1）$\dfrac{A}{\pi}+\dfrac{A}{2}\sin x+\dfrac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-4n^2}\cos 2nx$；

（2）$\dfrac{2A}{\pi}+\dfrac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-4n^2}\cos 2nx$。

3．（1）$\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx$；

（3）$\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\sin\dfrac{n\pi}{2}+(-1)^{n+1}n\pi}{n^2}\sin nx$；

（4）$\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\dfrac{n\pi}{2}x$。

4．（1）$\dfrac{\pi+2}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$；

（2）$\dfrac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos 2nx$；

（3）$\left(\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{\pi}\cos 2x+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}\left(\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}-1\right)\cos 2nx$；

（4）$\dfrac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx$。

5．（1）$\dfrac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\cos nx-\dfrac{\pi}{n}\sin nx\right)$；

（2）$-\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{6[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi}{3}x+\dfrac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{3}x\right\}$；

（3）$\dfrac{C}{2}-\dfrac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{T}x$；

（4）$\dfrac{1-e^{-3}}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{3[1-e^{-3}(-1)^n]}{n^2\pi^2+9}\cos n\pi x+\dfrac{[-1+e^{-3}(-1)^n]n\pi}{n^2\pi^2+9}\sin n\pi x\right\}$；

（5）$10\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{5}x$。

6．

$$
\begin{aligned}
&-\frac{5}{4\pi}(2-\sqrt{2})-\frac{5}{4\pi}\cos\omega t+\frac{5(7\pi+2)}{8\pi}\sin\omega t\\
&+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+\frac{2}{n^2-1}\right]\cos n\omega t\text{。}\\
&+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]\sin n\omega t.
\end{aligned}
$$

7．$f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-4n^2)}\cos 2nx$，$x\in[-\pi,\pi]$；$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-4n^2}=-\dfrac{1}{2}$。

8．$\dfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+3(-1)^n}{n}\sin nx$。和函数在 $x=10\pi$ 的值为 0，在 $x=\dfrac{21}{2}\pi$ 的值为 $-\dfrac{\pi}{8}$。

9．提示：$a_{2n-1}=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)xdx+\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx.$，对第二个积分作变换 $x=t+\pi$ 便得 $a_{2n-1}=0$。其它类似证明。

10．（1）可取如下的延拓函数：

$$
\tilde{f}(x)=\begin{cases}
-f(\pi+x), & x\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right),\\
f(-x), & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right),\\
f(x), & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\
-f(\pi-x), & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),
\end{cases}
$$

其中未给出定义的点可取函数值 0。

（2）可取如下的延拓函数：

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(\pi+x), & x\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right), \\ -f(-x), & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right), \\ f(x), & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), \\ -f(\pi-x), & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right), \end{cases}$$

其中未给出定义的点可取函数值 0。

11．（1）$\tilde{a}_n=a_n$（$n=0,1,2,\cdots$），$\tilde{b}_n=-b_n$（$n=1,2,\cdots$）；

（2）$\tilde{a}_n=a_n\cos nC+b_n\sin nC$，$\tilde{b}_n=b_n\cos nC-a_n\sin nC$（$n=1,2,\cdots$）；

（3）$\tilde{a}_0=a_0^2$，$\tilde{a}_n=a_n^2-b_n^2$，$\tilde{b}_n=2a_nb_n$（$n=1,2,\cdots$）。

12．略。

13．$\dfrac{\pi^4}{96}$。

§4 Fourier 变换初步

1．（1）$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$；（2）$\dfrac{1}{2+\omega\mathrm{i}}$；（3）$\dfrac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}$。

2．提示：（1）利用

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{i\omega(x-t)}dt=f(x) \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos\omega(x-t)+\mathrm{i}\sin\omega(x-t)]dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt, \end{aligned}$$

以及 f 是偶函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt=0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt=2\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt$。

（2）与（1）类似。

3．（1）略；（2）$\varphi(x)=e^{-|x|}$。